4-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2008 год

Задача №1. Точки K, L, M, N - соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямая KM пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q соответственно. Прямая LN пересекает диагонали AC и BD в точках R и S соответственно.

Докажите, что если $AP \cdot PC = BQ \cdot QD$, то $AR \cdot RC = BS \cdot SD$.

Задача №2. Назовем многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *хорошим*, если его можно представить в виде суммы кубов нескольких многочленов (от переменной x) с целыми коэффициентами. Например, многочлены $x^3 - 1$ и $9x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x-1)^3 + (2x)^3 + 2^3$ являются хорошими.

а) Является ли многочлен $P(x) = 3x + 3x^7$ хорошим?

б) Является ли многочлен $P(x) = 3x + 3x^7 + 3x^{2008}$ хорошим?

Обоснуйте ваши ответы.

Задача №3. Положим $A = \{(a_1, \ldots, a_8) | a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq a_i \leq i+1\}$ для всех $i = 1, \ldots, 8\}$. Назовем подмножество $X \subset A$ *разреженным*, если для любых двух различных элементов $(a_1, \ldots, a_8), (b_1, \ldots, b_8) \in X$ существуют хотя бы три индекса i таких, что $a_i \neq b_i$.

Найдите наибольшее возможное количество элементов в разреженном подмножестве множества A.

Задача №4. Для всякого натурального n обозначим через $S(n)$ сумму цифр в десятичной записи числа n.

Найдите все натуральные n такие, что $n = 2S(n)^3 + 8$.

Задача №5. Непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются прямой ℓ в точках A_1 и A_2 соответственно (окружности лежат по одну сторону от ℓ). Точка K - середина отрезка A_1A_2. На окружностях ω_1 и ω_2 выбраны точки B_1 и B_2 соответственно так, что прямые KB_1 и KB_2 касаются ω_1 и ω_2 соответственно (точка B_1 отлична от A_1, а точка B_2 отлична от A_2). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке L, а прямые KL и O_1O_2 - в точке P.

Докажите, что точки B_1, B_2, P и L лежат на одной окружности.

Задача №6. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$