V олимпијада

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

каде што p е реален параметар.

Решение. Левата страна на равенката е ненегативна, па затоа $x\geq 0$. Понатаму, корените треба да се реални, па затоа $x^2\geq p$ и $x^2\geq 1$. Равенката ја запишуваме во видот

$$2\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-p}, \tag{1}$$

од каде што следува $x\geq\sqrt{x^2-p}$, т.е. $p\geq 0$. Со квадрирање на (1) добиваме

$$4-p-2x^2=2x\sqrt{x^2-p}, \tag{2}$$

па како десната страна на (2) е позитивна добиваме

$$4-p-2x^2\geq 0. \tag{3}$$

Со квадрирање на (2), по средувањето добиваме добиваме

$$x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)},\ p<2, \tag{4}$$

Со замена на x^2 од (4) во (3) ја добиваме неравенката

$$3p^2-16p+16\geq 0,$$

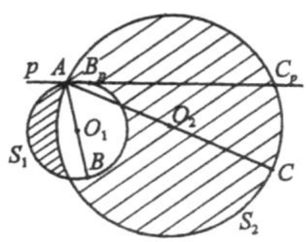
од каде наоѓаме $p\leq\frac{4}{3}$ или $p\geq 4$. Но, треба $p<2$, па затоа случајот $p\geq 4$ доведува до комплексни решенија на дадената равенка. Според тоа, $p\leq\frac{4}{3}$ и како $p\geq 0$ во овој случај имаме

$$x=\frac{-p+4}{2\sqrt{2(2-p)}},\ 0\leq p\leq\frac{4}{3}.$$

Лесно се проверува во овој случај се исполнети условите $x^2\geq p$ и $x^2\geq 1$.

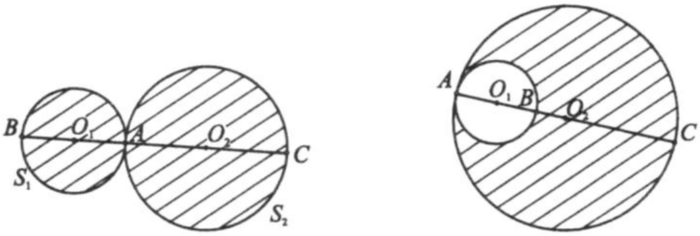
2. Во просторот определи го геометриското место на темињата на правите агли за кои едниот крак минува низ дадена точка A, а другиот има барем една заедничка точка со отсечката BC.

Решение. Околу отсечките AB и AC како дијаметри, конструираме топки S_1 и S_2 (цртеж десно). Секоја точка од површините на овие топки е теме D на правоаголен триаголник BDA, односно CDA.



Бараното геометриско место е определено со точките што припаѓаат на овие топки и на нивните гранични површини, од кои се изземени точките што едновремено припаѓаат на внатрешноста на двете топки. За последното се користи ознаката $(\overline{S_1} \cup \overline{S_2}) \setminus (S_1 \cap S_2)$, каде што $\overline{S_i}$ гом означува множеството точки кои припаѓаат на внатрешноста или на границата на топката S_i, додека со S_i се означени само внатрешните точки.

Навистина, да повлечеме произволна права p низ точката A. Освен во случај кога правата p е тангента на барем една од граничните сфери на топките S_1 и S_2, таа се сече со површините на овие топки, покрај во A, уште во по една точка, соодветно B_p и C_p. Тоќките B_p и C_p се проекции соодветно на точките B и C на правата p. Очигледно сите точки од отсечката B_pC_p и само тие од правата p припаѓаат на бараното геометриско место, а се вклучени во $(\overline{S_1} \cup \overline{S_2}) \setminus (S_1 \cap S_2)$. На долните цртежи се прикажани и двата специјални случаја кога точката A припаѓа на правата BC.



3. Даден е конвексен $n-$аголник кај кој сите внатрешни агли се еднакви и чии последователни страни ги задоволуваат неравенствата

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n ..$$

Докажи дека $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Решение. Да го разгледаме случајот кога $n = 2k+1$. Да ги означиме темињата на многуаголникот со $A_1, A_2, ..., A_{2k}, A_{2k+1}$. Бидејќи сите агли во многуаголникот се еднакви, симетралата на аголот со теме A_1, меѓу a_1 и a_{2k+1} е нормална на страната $A_{k+1}A_{k+2} = a_{k+1}$. На оваа симетрала ги проектираме искршените линии $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_{2k+1}A_{2k}...A_{k+2}$. Двете проекции имаат еднаква должина. Аглите меѓу страните A_iA_{i+1} и $A_{2k-i+1}A_{2k-i}$ $(i \leq k)$ и симетралата се еднакви. Затоа должината на проекцијата на страната A_iA_{i+1} не е помала од должината на проекцијата на страната $A_{2k-i+1}A_{2k-i}$. Ако во низата неравенства

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_{2k+1}$$

постои строго неравенство, тогаш ќе имаме строго неравенство и во должините на проекциите на $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_{2k+1}A_{2k}...A_{k+2}$, што противречи на добиеното равенство. Од оваа противречност следува $a_1 = a_2 = ... = a_{2k+1}$

Случајот $n = 2k$ се разгледува аналогно, со таа разлика што проекциите се на права која е нормална на правата A_1A_n.

4. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$$

каде y е реален параметар.

Решение. Од првата и втората равенка добиваме

$$x_2 = yx_1 - x_5$$
$$x_3 = yx_2 - x_1$$

односно

$$x_3 = (y^2 - 1)x_1 - yx_5 \qquad (1)$$

Слично, од четвртата и петтата равенка добиваме

$$x_3 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1 \qquad (2)$$

Понатаму, од (1) и (2) следува

$$(y^2 + y - 1)(x_1 - x_5) = 0$$

Разгледуваме два случаи.

а) Ако $y^2 + y - 1 \neq 0$, тогаш $x_1 = x_5$. Ако наместо првата, втората, четврата и петтата равенка ги разгледаме втората, третата, петата и првата равенка и расудувајќи аналогно, добиваме дека $x_2 = x_1$. Со аналогни разгледувања наоѓаме

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x\ .$$

За $y = 2$, x е било кој реален број, а за $y \neq 2$ добиваме $x = 0$.

б) Нека $y^2 + y - 1 = 0$. Ги множиме првата, втората и третата равенка со 1, y и $-y$, соодветно и ако добиените равенки ги собереме добиваме

$$x_5 + x_2 + yx_1 + yx_3 - yx_2 - yx_4 = yx_1 + y^2x_2 - y^2x_3\ ,$$

односно

$$x_5 + (y^2 + y)x_3 = yx_4 + (y^2 + y - 1)x_2\ .$$

Ако го искористиме условот $y^2+y=1$, тогаш последната равенка ја сведуваме на четвртаа равенка. Според тоа, од првите три равенки ја добиваме четвртата равенка. Аналогно, петтата равенка ја добиваме од втората, третата и четвртата равенка.

Според тоа, дадениот систем е еквивалентен на системот

$$x_2 = yx_1 - x_5 \tag{3}$$

$$x_3 = -y(x_1+x_5) \tag{4}$$

$$x_4 = yx_5 - x_1 \tag{5}$$

каде x_1 и x_5 се произволни реални броеви.

Освен очигледното решение $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$, дадениот систем ги има и следниве решенија:

- ако $y=2$, $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

- ако $y^2+y-1=0$, т.е. $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, тогаш x_1 и x_5 се произволни реални броеви а x_2, x_3 и x_4 се дадени со равенките (3)-(5).

5. Докажи го равенството

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Го множиме и делиме изразот од левата страна на равенството со $2\cos\frac{\pi}{14}$ и ако ги искористиме формулата $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$ и парноста на функцијата $\cos x$ добиваме:

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)\\ &= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}\right)\\ &= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\cos\frac{\pi}{14}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

6. Учениците A, B, C, D и E учествувале на натпревар. Еден гледач се обидел да ги погоди резултатите на натпреварот и претпоставил дека редоследот ќе биде A, B, C, D, E, но тој не го погодил пласманот на ниту еден ученик и ниту еден пар ученици кои што се пласирале непосредно еден по друг. Друг гледач претпоставил дека резултатот ќе биде D, A, E, C, B и тој го погодил точното место на два ученика, а исто така и на два пара ученици кои се пласирале непосредно еден по друг. Кој е резултатот на натпреварувањето?

Решение. Прво да забележиме дека, ако пласманот на двајца натпреварувачи е точно предвиден и ако е точно предвиден пласманот на едниот натпреварувач, тогаш точно е предвиден и пласманот на другиот натпреварувач.

Да го разгледаме предвидувањето на вториот гледач. Во ова предвидување имаме четири парови: DA, AE, EC и CB. Два од овие пара се точно предвидени.

Нека претпоставиме дека точно се предвидени паровите кои имаат заеднички елемент (DA, AE или AE, EC или EC, CB). Тогаш ниту едно од точно предвидените места не може да припаѓа на некој од точно предвидените парови, бидејќи во овој случај ќе имаме барем три точно предвидени места. Ако двете погодени места се надвор од тројката со погоден редослед, тогаш би биле погодени сите пет места (бидејќи трите преостанати места ги пополнуваат на точен начин трите преостанати натпреварувачи). Затоа точно предвидените парови се дисјунктни.

Според тоа кои парови се точно предвидени, можни се следните случаи:

а) DA и EC. Барем едно погодено место припаѓа на подреден пар, па тој пар претставува две погодени места, а другиот пар погрешно предвидени места. Ако двете места од парот DA се точно предвидени резултатот на натпреварувањето би бил $DABEC$, што не е можно, бидејќи првата личност ќе има точно погоден пар. Ако парот EC е точен, тогаш и парот DA треба да е точно предвиден (во однос на местата) што не е можно.

б) AE и CB. Ако двете места на парот AE се точно предвидени, тогаш и парот CB (во однос на местата) е точно предвиден, што не е можно. Ако двете места на парот CB се точно предвидени, тогаш резултатот ќе биде $AEDCB$, што не е можно, бидејќи предвидувањето за A би било како и кај првата личност.

в) DA и CB. Ако двете места на DA се точно предвидени, тогаш резултатот би бил $DACBE$, што не е можно бидејќи C е на третото место како исто како и кај првата личност. Ако двете места на парот CB се точни, тогаш резултатот е $EDACB$ и се исполнети сите услови на задачата.