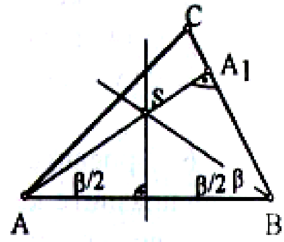
XXII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII одделение

1. Во триаголник ABC, висината на страната BC, симетралата на аголот ABC и симетралата на страната AB се сечат во една точка. Одреди ја големината на аголот ABC.



Решение: Нека S е пресечната точка на двете симетрали и висината и $\measuredangle ABC=\beta$. Бидејќи S лежи на симетралата на страната AB, следува дека $\overline{SA}=\overline{SB}$, односно ΔABS е рамнокрак, па $\measuredangle SAB=\measuredangle SBA=\frac{\beta}{2}$. Од ΔABA_1: $\frac{\beta}{2}+\beta=90^\circ$, $\beta=60^\circ$.

2. Секој cm^2 од правоаголник со димензии 8 cm и 4 cm треба да се обои со различна боја или со бои со различни нијанси. Дали е можно тоа да се направи со црвена, сина, црна, зелена и жолта боја како и нијансите што може да се добијат со мешање на две, три, четири или сите пет бои во еднакви односи.

Решение: Правоаголникот има плоштина $P = 8\cdot 4=32\ cm^2$. Со петте бои може да се обојат $5\ cm^2$. Со две бои може да се добијат 10 нијанси, односно да се обојат $10\ cm^2$. Со три бои може да се добијат исто така 10 нијанси, односно да се обојат уште $10\ cm^2$. Со четири бои може да се добијат 5 нијанси, односно да се обојат $5\ cm^2$. На крајот, со петте бои може да се добие една нијанса, односно да се обои $1\ cm^2$. Значи, вкупно ќе се обојат: $5+10+10+5+1 = 31\ cm^2$, односно $1\ cm^2$ од правоаголникот ќе остане необоен со дадените бои или нијансите добиени од нив, земени во еднаков однос?

3. Реалните броеви a, b, c и d го задоволуваат условот: $a^2+d^2-2(ab+bc+cd-b^2-c^2)=0$. Докажи дека $a=b=c=d$.

Решение:

Од $a^2+d^2-2(ab+bc+cd-b^2-c^2)=0$, следува $a^2+d^2-2ab-2bc-2cd+2b^2+2c^2=0$, или $(a^2-2ab+b^2)+(d^2-2cd+c^2)+(b^2-2bc+c^2)=0$, односно $(a-b)^2+(d-c)^2+(b-c)^2=0$, а ова равенство е исполнето ако $a-b=0$, $d-c=0$ и $b-c=0$, односно ако $a=b=c=d$.

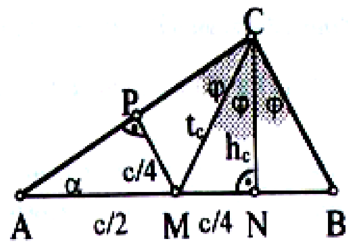
4. Одреди ги сите трицифрени броеви што се деливи со 11, а збирот на нивните цифри е 10.

Решение: Да ги означиме со $\overline{abc}$ (каде a, b и c се цифри) бараните трицифрени броеви. За нив важи:: $11 \mid \overline{abc}$ и $a+b+c=10$.

$\overline{abc} = 100a + 10b+c = 99a+9b + (a+b+c)$. Бидејќи $a+b+c=10$ следува дека $\overline{abc} = 99a+9b+10$, односно $\overline{abc} = 99a + 11b+11 - (2b+1)$. Јасно е дека $99a+11b+11$ е деливо со 11. Бидејќи $11 \mid \overline{abc}$, следува дека $11 \mid 2b+1$, а ова е исполнето само ако $2b+1=0$ или $2b+1 = 11$. Бидејќи b е цифра следува дека $2b+1 \neq 0$, а од $2b+1 = 11$ следува дека $b=5$. Од условот следува дека $a+c = 5$, па бараните трицифрени броеви се: 154, 253, 352, 451 и 550.

5. Во даден триаголник ABC висината и тежишната линија што се повлечени од темето C го делат аголот C на три еднакви дела. Одреди ги аглите на триаголникот.

Решение: Нека $\overline{CM} = t_c$ и $\overline{CN} = h_c$ го делат аголот C на три еднакви дела. Ако $P \in AC$, така што $MP \perp AC$, тогаш $\Delta CMP \cong \Delta CMN$ ($\measuredangle P = \measuredangle N = 90^\circ$, CM е заедничка страна и $\measuredangle PCN = \measuredangle MCN = \varphi$). Следува дека $\overline{PM} = \overline{MN} = \frac{c}{4}$ (ΔMBC е рамнокрак, значи $\overline{MN} = \overline{NB} = \frac{c}{4}$). Бидејќи хипотенузата AM



во ΔAMP е двапати поголема од катетата PM следува дека $\alpha = 30^\circ$. $\measuredangle PMN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, а од складноста на триаголниците следува дека $\measuredangle PMC = \measuredangle CMN = 60^\circ$, односно $\varphi = 30^\circ$, т.е. $\measuredangle C = 90^\circ$, а $\measuredangle B = 60^\circ$.

VIII одделение

1. Упрости го изразот $A = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{1996} - a^{1997} + \frac{a^{1998}}{1+a}$ и пресметај ја неговата вредност за $a = -\frac{1996}{1997}$.

Решение:

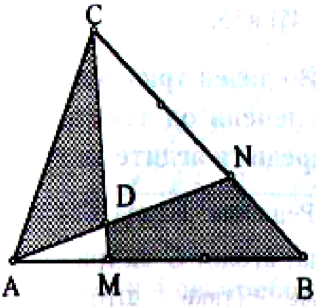
$$A = \frac{1+a-a(1+a)+a^2(1+a)-a^3(1+a)+\ldots+a^{1996}(1+a)-a^{1997}(1+a)+a^{1998}}{1+a} =$$

$$= \frac{1+a-a-a^2+a^2+a^3-a^3+\ldots+a^{1997}-a^{1997}-a^{1998}+a^{1998}}{1+a} = \frac{1}{1+a}.$$

За $a=-\frac{1996}{1997}$, $A=\frac{1}{1-\frac{1996}{1997}}=1997$.

2. Во триаголник ABC дадени се точки M и N ($M\in AB$, $N\in BC$) такви што $\overline{AM}:\overline{MB}=1:2$ и $\overline{BN}:\overline{NC}=1:2$. Нека отсечките AN и CM се сечат во точка D. Докажи дека триаголникот ADC и четириаголникот MBND се еднаквоплошни.

Решение: $P_{\Delta ABN}=\frac{1}{3}P_{\Delta ABC}$ и $P_{\Delta AMC}=\frac{1}{3}P_{\Delta ABC}$.



имаме $P_{\Delta ADC}=P_{\Delta AMC}-P_{\Delta AMD}=$

$=\frac{1}{3}P_{\Delta ABC}-P_{\Delta AMD}$ ...(1)

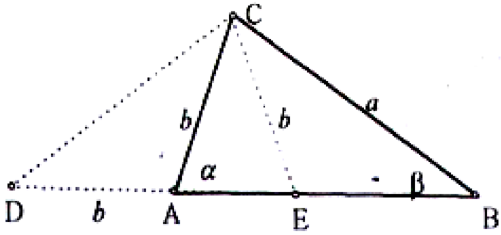
и $P_{MBND}=P_{\Delta ABN}-P_{\Delta AMD}=\frac{1}{3}P_{\Delta ABC}-P_{\Delta AMD}$ ... (2). Од (1) и (2) следува дека $P_{\Delta ADC}=P_{MBND}$.

3. Ако трицифрен број, на кој двете последни цифри се еднакви, е делив со 7, тогаш и збирот на неговите цифри е делив со 7. Докажи.

Решение: Дадениот трицифрен број да го означиме со $\overline{abb}$. $\overline{abb}=100a+11b=$ $=(98a+7b)+(2a+4b)=7(14a+b)+2(a+2b)$. Бројот $7\cdot(14a+b)$ е делив со 7. Бидејќи $7\mid(100a+11b)$, следува дека $7\mid2(a+2b)$, односно $7\mid(a+2b)$.

4. Во триаголник ABC аголот α при темето A е двапати поголем од аголот β при темето B. Ако $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$, докажи дека $a^2=b\cdot(b+c)$.

Решение: Нека E и D се точки од правата AB така што $\overline{AD}=\overline{CE}=\overline{AC}$. ΔADC е рамнокрак ($\overline{AD}=\overline{AC}$) и α е надворешен агол за тој триаголник. Следува дека $\measuredangle ADC+\measuredangle ACD=\alpha$, односно $\measuredangle ADC+\measuredangle ACD=\beta/2$. Би-

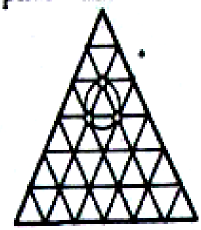


дејќи ΔACE е рамнокрак ($\overline{CA}=\overline{CE}$) следува дека $\measuredangle AEC=\alpha$, а од $\alpha=2\beta$ и $\measuredangle B=\beta$

следува дека $\measuredangle ECB=\beta$, односно ΔBCE е рамнокрак ($\overline{BE}=\overline{CE}$). Од $\Delta DBC \sim \Delta BCE$ следува: $\overline{BC}:\overline{CE}=\overline{DB}:\overline{BC}$, односно $a:b=(b+c):a$ или $a^2=b(b+c)$.

5. Во рамностран триаголник со страна a = 31 cm на произволен начин се разместени 1997 точки. Докажи дека барем три од овие точки може да се покријат со круг со радиус r = 0,6 cm.

Решение: Да го разделиме дадениот рамностран триаголник на рамнострани триаголници со страна 1 cm. Такви триаголници ќе се добијат: $1+3+5+...+61 = (1+61)+(3+59)+...+(29+33)+31 = 15\cdot62+31 = 31\cdot31 = 961$. Во триаголникот има 1997 точки.



Бидејќи $961\cdot2 = 1922 < 1997$, заклучуваме дека постои триаголник со страна 1 cm во кој се наоѓаат барем три точки (принципот на Дирихле). Радиусот на круг опишан околу таков триаголник е $\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{cm}\approx\frac{1,73}{3}<\frac{1,8}{3}=0,6$ cm. Значи, во внатрешноста на овој круг има барем три точки.