О РЕЗАЊУ ТРАПЕЗА

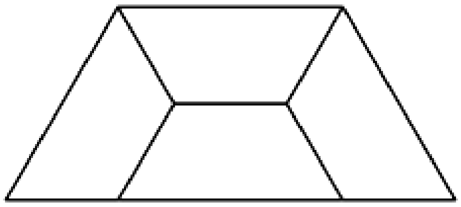
Ратко Тошић, Јожеф Ј. Варга

Међу разним задацима о резању фигура често се може наћи и следећи задатак:

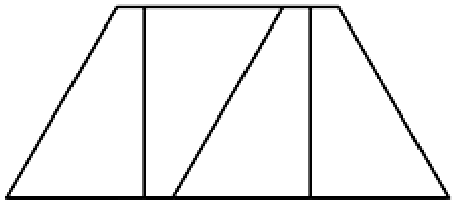
Задатак. Трапез са страницама 2, 1, 1, 1 разрезати на 4 подударна дела.

Јасно је да је трапез са датим страницама једнакокрак, да његова већа основица има дужину 2, а мања основица и краци су исте дужине 1.

Најчешће се тражи решење у коме су и четири мања дела трапези и при томе слични датом трапезу, тј. и странице малих трапеза односе се као 2 : 1 : 1 : 1. Решење је дато на слици 1.



слика 1



слика 2

Уколико се не захтева да мали трапези буду слични полазном, постоји и друго решење, као на слици 2. У овом решењу су мали трапези правоугли и подударни, а подела је извршена правама које секу обе основице трапеза.

Одредимо сада дужине основица малих трапеза при подели као на слици 2.

Нека су a и b основице датог трапеза, $a > b$. Означимо са x дужу, а са y краћу основицу малог трапеза. Тада је, према слици 2,

$$3x + y = a,$$
$$x + 3y = b.$$

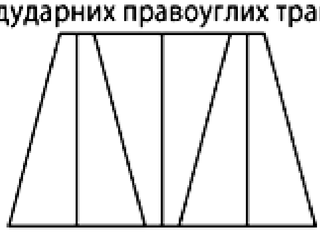
Решење овог система једначина је

$$x = \frac{3a - b}{8},\ y = \frac{3b - a}{8}.$$

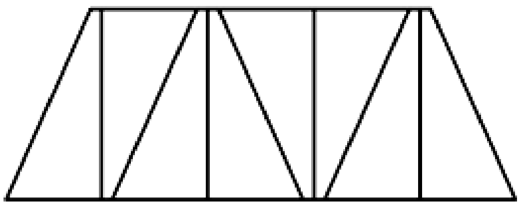
У нашем конкретном случају, за $a = 2$, $b = 1$, добијамо да је $x = \frac{5}{8}$, $y = \frac{1}{8}$.

Размотрићемо сада поделе произвољног једнакокраког трапеза на n подударних правоуглих трапеза, где је n произвољан паран природан број, при чему се подела врши дужима са крајевима на основицама трапеза.

Подела на два правоугла трапеза је тривијална; треба спојити једном дужи средишта основица. На сликама 3 и 4 представљена је подела датог једнакокраког трапеза на 6 и 8 мањих подударних правоуглих трапеза.



слика 3



слика 4

Поставља се питање да ли је таква подела могућа за било који дати једнакокраки трапез. Размотримо детаљније случај $n = 6$. Тада је, према слици 3,

$$4x + 2y = a,$$
$$2x + 4y = b.$$

Решење овог система једначина је

$$x = \frac{2a - b}{6},\ y = \frac{2b - a}{6},$$

при чему решење (тј. одговарајућа подела) постоји ако је $a < 2b$ (јер у противном y није позитиван број).

У општем случају, за $n = 2k$, добија се систем једначина

$$(k + 1)x + (k - 1)y = a,$$
$$(k - 1)x + (k + 1)y = b.$$

Решење овог система једначина је

$$x = \frac{(k+1)a - (k-1)b}{4k},\ y = \frac{(k+1)b - (k-1)a}{4k}.$$

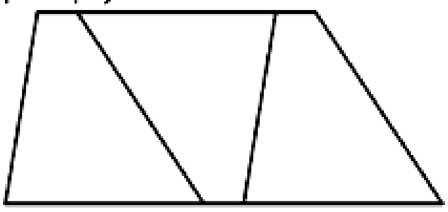
Како су дужине основица a и b позитивни бројеви, решење (тј. одговарајућа подела) постоји ако је $(k + 1)b - (k - 1)a > 0$, тј.

$$a < \frac{k+1}{k-1}b$$

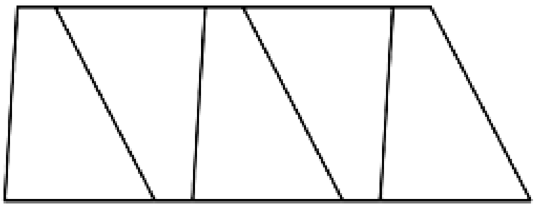
(јер у противном y није позитиван број).

На пример, за $n = 4$, тј. $k = 2$, подела је могућа ако је $a < 3b$, тј. ако је дужина веће основице мања од троструке дужине мање основице.

Питање поделе трапеза на мање подударне трапезе може се поставити и за произвољан трапез, а не само једнакокраки. Испитаћемо који се трапези правама које секу њихове основице могу поделити на n подударних трапеза (не обавезно правоуглих) ако је n непаран број.



слика 5



слика 6

Посматрајмо случај $n = 3$. На слици 5 је представљена једна таква подела. Уз раније уведене ознаке је

$$2x + y = a,$$
$$x + 2y = b.$$

Решење овог система једначина је

$$x = \frac{2a - b}{3},\ y = \frac{2b - a}{3},$$

при чему решење (тј. одговарајућа подела) постоји ако је $a < 2b$.

У општем случају, за $n = 2k - 1$, добија се систем једначина

$$kx + (k - 1)y = a,$$
$$(k - 1)x + ky = b.$$

Решење овог система једначина је

$$x = \frac{ka - (k-1)b}{2k-1},\ y = \frac{kb - (k-1)a}{2k-1},$$

при чему решење (тј. одговарајућа подела) постоји ако је $kb - (k - 1)a > 0$, тј.

$$a < \frac{k}{k-1} b. \qquad (*)$$

Пример. За $k = 3$, тј. $n = 5$, према претходном излагању мора бити $a < 1{,}5b$. Нека је, на пример, $a = 14$cm, $b = 11$cm. Тада је

$$x = \frac{3 \cdot 14 - 2 \cdot 11}{2 \cdot 3 - 1} = 4\text{cm}, \quad y = \frac{3 \cdot 11 - 2 \cdot 14}{2 \cdot 3 - 1} = 1\text{cm}.$$

Одговарајућа подела представљена је на слици 6.

Задаци

1. Дат је трапез са основицама $a = 20$cm, $b = 1$cm. Да ли је могуће поделити тај трапез на 8 подударних правоуглих трапеза чији су крајеви на основицама датог трапеза?

Решење. Да, јер је $20 < \frac{5}{3} \cdot 13 = \frac{65}{3}$.

2. Одреди највећи непаран број n такав да се трапез са основицама $a = 50$cm, $b = 40$cm може поделити на n подударних трапеза правама које секу његове основице.
Решење. Према (*) је

$$50 < 40 \cdot \frac{k}{k-1}, \text{ тј. } 50(k-1) < 40k, \text{ одакле је } 10k < 50, \text{ тј. } k < 5.$$

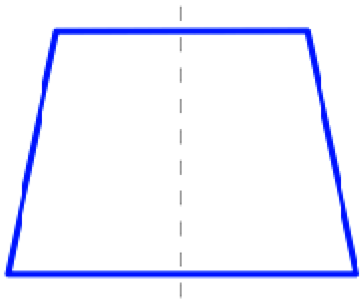
Највећи цео број мањи од 5 је 4, а за $k = 4$ добијамо тражени најмањи број $n = 7$.

3. Дужа основица трапеза је $a = 40$cm. Колика треба да буде дужина краће основице да би се тај трапез могао поделити на 5 подударних трапеза правама које секу његове основице?
Решење. Овде је $k = 3$, па је према (*),

$$40 < \frac{3}{2} b, \text{ тј. } b > \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}.$$

Дакле, мора бити $b > 26\frac{2}{3}$cm.

4. Да ли је могуће поделити једнакокраки трапез са основицама дужине 10cm и 2cm на 6 подударних трапеза ако је дозвољено повлачити и линије поделе паралелне основицама?
Решење. Да. Поделимо трапез средњом линијом на два: један са основицама дужине 6cm и 2cm, други са основицама 10cm и 6cm. Први можемо поделити на два подударна правоугла трапеза, други на 4 иста таква.



5. Једнакокраки трапез са основицама дужине 2cm и 18cm подели на 20 подударних трапеза.
Упутство. Прво подели дати трапез, правама паралелним основицама, на 4 трапеза једнаких висина.

6. Једнакокраки трапез са основицама дужине 2cm и $(2 + 4n)$cm подели на $n(n + 1)$ подударних трапеза.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија