

**Статијата прв пат е објавена во списанието Математички
лист на ДМ на Србија**

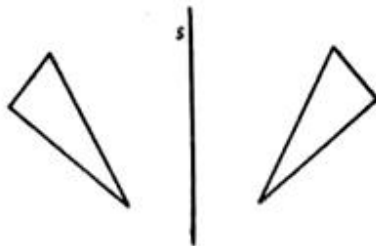
M. Ilić-Dajović (Beograd)

O OSNOJ SIMETRIJI

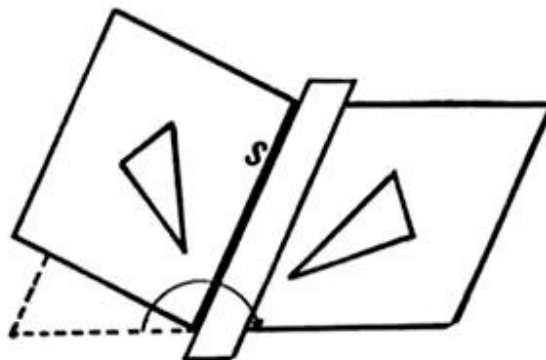
I

1. Pred nama je sl. 1, na kojoj su u istoj ravni nacrtana dva trougla i prava s koja ih razdvaja. Uzmimo list providne hartije, stavimo ga preko slike i prekopirajmo oba trougla (jedan plavom a drugi crvenom bojom) i pravu s . Presavijmo sada hartiju duž prave s i pogledajmo je prema svetlosti; videćemo da se oba trougla potpuno poklapaju, to jest, ni na kojem od njih ne postoji nijedna tačka koja se ne poklapa s nekom tačkom drugog trougla. Takve trougle nazivamo *podudarnim trouglima*; oni imaju isti oblik i po veličini su jednaki.

Za takve podudarne trougle kao što su oni na sl. 1 kažemo da su *osno simetrični u odnosu na pravu s* , ili da su jedan drugom simetrični u odnosu na osu simetrije s .



Sl. 1



Sl. 2

Razvijmo sada hartiju na koju smo prekopirali sl. 1, stavimo je na sto i pritisnimo je lenjirom tako da se ivica lenjira poklopi sa pravom s (sl. 2). Ako sada želimo da se obe figure poklope, moramo jednu polovinu lista obrnuti za 180° oko ivice lenjira (tj. oko ose s). Vidimo, dakle, da se osno simetrični trouglovi mogu

dovesti do poklapanja tako što se jedan od njih obrne za 180° oko ose simetrije s .

To što je rečeno za osno simetrične trouglove, važi i za bilo koje druge ravne figure:

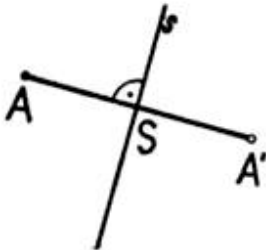
Dve podudarne ravne figure su simetrične u odnosu na pravu s koja leži u njihovoj ravni ako se, obrtanjem jedne od njih za 180° oko s , one mogu dovesti do potpunog uzajamnog poklapanja (ili, kako se još kaže, ako se tim obrtanjem mogu prevesti (preslikati) jedna u drugu).

2. Na tabli su nacrtani „zmaj“ $ABCD$ u prava s (sl. 3). Kako ćemo konstruisati „zmaj“ $A'B'C'D'$ osno simetričan sa $ABCD$ u odnosu na s ? Tablu ne možemo presaviti — to je jasno. Pa ipak, to još ne znači da se taj zadatak ne može rešiti.

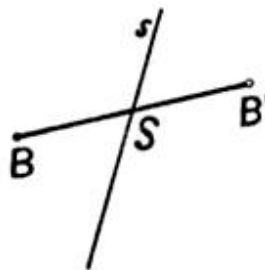
Znamo da „zmajevi“ $A'B'C'D'$ i $ABCD$ moraju biti podudarni, tj. istog oblika i jednake veličine. Nije teško nacrtati koliko god hoćemo četvorouglova istog oblika i jednake veličine kao četvorougao $ABCD^*$; ali, kako utvrditi koji je od njih osno simetričan sa $ABCD$?

Da bismo odgovorili na to pitanje, moramo matematički utvrditi svojstva osne simetrije.

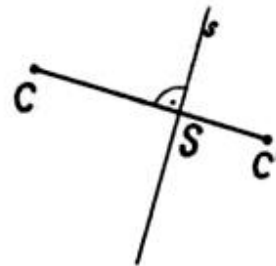
Za tačke A i A' (sl. 4a) kažemo da su osno simetrične u odnosu na pravu s (osa simetrije) sa kojom leže u istoj ravni, ako prava s polovi duž (odsečak) AA' pod pravim uglom.



Sl. 4a



Sl. 4b



Sl. 4c

* Setite se kako se pravi „zmaj“: ukrste se dva pruta — AC i BD na sl. 3 — i dobro svežu jedan za drugi; zatim se njihovi slobodni krajevi (A, B, C i D na slici) spoje prutićima (AB, BC, CD i DA) i, na kraju, preko takvog kostura razapne se hartija. Dovoljno je da dva „zmaja“ imaju unutrašnje prutiće jednake (po jedan veći i jedan manji) i da su spojeni na sredini manjeg prutića, pa da oba „zmaja“ imaju isti oblik i jednaku veličinu, da su, kako se to u geometriji kaže, podudarni.

Dakle, da bi tačka A' bila osno simetrična tački A u odnosu na datu pravu s , moraju biti ispunjena ova dva uslova:

(1) prava s prolazi kroz sredinu S duži AA' (tj. $AS = A'S = \frac{1}{2}AA'$), i

(2) prava s je normalna na duži AA' (tj. $s \perp AA'$).

Prema tome, na sl. 4b prava s nije osa simetrije tačaka B i B' iako je $BS = B'S = \frac{1}{2}BB'$, jer s seče BB' pod kosim uglom; isto tako ni prava s na sl. 4c nije osa simetrije tačaka C i C' (zašto?).

Sada, pošto smo utvrdili karakteristično svojstvo osno simetričnih tačaka, možemo rešiti nekoliko najprostijih zadataka.

Primer 1. — U ravni su date prava s i tačka M van te prave; odrediti tačku M' osno simetričnu tački M u odnosu na pravu s .

Rešenje. — Tačka M' mora se nalaziti na polupravoj (zraku) m koja polazi iz tačke M i seče s pod pravim uglom u tački S (sl. 5); sem toga, mora biti $M'S = MS$. Na osnovu toga lako je geometrijski odrediti tačku M' osno simetričnu datoj tački M u odnosu na datu pravu s .

Zadatak. — Pomoću lenjira i šestara precizno odredite tačku M' .

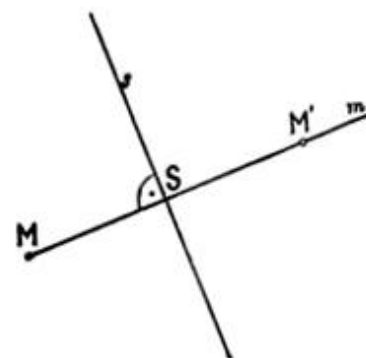
Pitanje. — Ako se tačka N nalazi na osi simetrije s , gde se onda nalazi osno simetrična tačka N' ?

Primer 2. — U ravni su date tačke M i M' ; konstruisati njihovu osu simetrije s u toj ravni.

Rešenje je sasvim lako: traži se prava s koja je normalna na duži MM' i prolazi kroz sredinu S te duži. Dakle, treba povući odsečak MM' , odrediti njegovu sredinu S i u tački S povući normalu s duži MM' ; prava s je tražena osa simetrije.

Zadatak. — Precizno konstruišite osu simetrije dveju proizvoljnih tačaka.

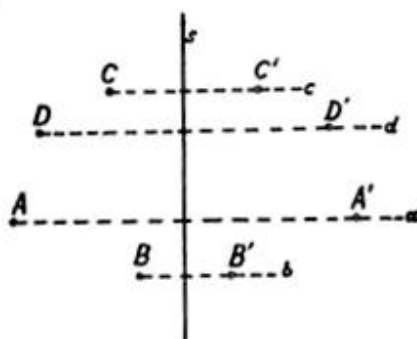
Primer 3. — U ravni je data geometrijska figura sastavljena od četiri izolovane tačke A, B, C, D i osa simetrije s ; konstruisati figuru osno simetričnu datoj figuri.



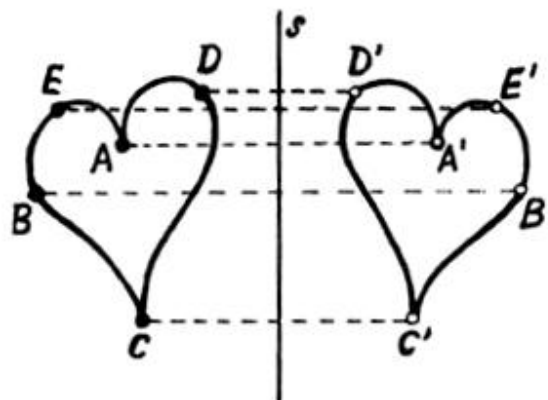
Sl. 5

Rešenje je pokazano na sl. 6.

3. Dve podudarne ravne figure F i F' su osno simetrične u odnosu na pravu s koja leži u njihovoj ravni (sl. 7) ako ma kojim tačkama $A, B, C, \dots$ figure F odgovaraju na figuri F' redom tačke $A', B', C', \dots$ simetrične u odnosu na tu osu s (što znači da je pri tom $AA' \perp s, BB' \perp s, CC' \perp s, \dots$ i da osa s polovi sve odsečke $AA', BB', CC', \dots$).



Sl. 6



Sl. 7

Primer 4. — Konstruisati duž osno simetričnu datoj duži AB u odnosu na datu osu s (koja sa AB leži u istoj ravni).

Rešenje se svodi na konstruisanje tačke A' osno simetrične tački A , i tačke B' osno simetrične tački B ; duž $A'B'$ je tražena duž.

Zadatak. — Precizno konstruišite trougao osno simetričan datom trouglu ABC u odnosu na pravu s koja leži u ravni tog trougla.

Zadatak. — Precizno konstruišite četvorougao osno simetričan „zmaju“ na sl. 3.

Pitanje. — Ako je duž MN normalna na osu simetrije s , kakav položaj prema s ima odgovarajuća osno simetrična duž $M'N'$?

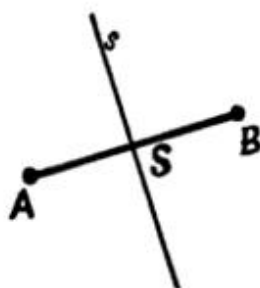
Koristeći se primerom 4 možemo lako svakom datom mnogouglu konstruisati osno simetričan mnogougao u odnosu na neku datu pravu.

4. Kako možemo, kad imamo dve podudarne ravne figure F i F' (u istoj ravni), utvrditi da li su one osno simetrične jedna drugoj?

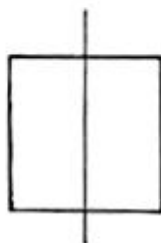
Odgovor je jednostavan: treba spojiti parove odgovarajućih tačaka A i A' , B i B' , C i C' , itd. (sl. 7) i konstruisati u sredini jedne od tih duži, npr. AA' , pravu $s \perp AA'$; ako ova prava polovi pod pravim uglom i sve ostale duži BB' , CC' , ..., koje spajaju odgovarajuće tačke, tada je s osa simetrije figura F i F' ; drugim rečima, tada je F' osno simetrična sa F .

5. Ima geometrijskih figura, predmeta u prirodi i predmeta stvorenih čovečijim rukama koji su takvog oblika da je jedna njihova polovina simetrična drugoj polovini u odnosu na neku pravu. Najprostiji takav primer je proizvoljna duž AB na sl. 8: osa simetrije njenih krajnjih tačaka A i B istovremeno deli tu duž na jednake duži AS i BS , koje su jedna drugoj simetrične u odnosu na pravu s (sl. 8).

Osa simetrije duži zove se i *simetrala duži*.



Sl. 8



Sl. 9

Na sl. 9 pokazani su: kvadrat s jednom svojom osom simetrije (ali to nije i jedina njegova osa simetrije), krug s jednom svojom osom simetrije i jednakokraki trougao sa osom simetrije.

Šta mislite: Koliko osa simetrije ima kvadrat? A koliko ih ima krug? Da li svaki trougao ima osu simetrije? Postoji li: a) trougao koji nema nijednu osu simetrije; b) trougao koji ima samo jednu osu simetrije; c) trougao koji ima samo dve ose simetrije; d) trougao koji ima tri ose simetrije; e) trougao koji ima više od tri ose simetrije?

U prirodi nalazimo izvanredno lepe primere osne simetrije: leptira sa simetrično raspoređenim šarama na krilima, snežne pahuljice, kestenov list, i mnoge druge (sl. 10).



Sl. 10

Oсна симetrija u prirodi odavna je podstakla ljude da predmetima koje stvaraju svojim rukama daju osno simetričan oblik;



Sl. 11

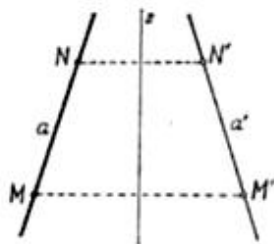
tako su nastali i mnogi osno simetrični ukrasi u arhitekturi, u narodnoj radinosti (npr. šare na prostirkama) i dr. (sl. 11).

II

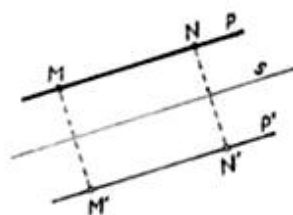
1. U ravni su date osa s i prava a . Da bismo pravu a preslikali u osno simetričnu pravu a' , dovoljno je da preslikamo dve proizvoljne tačke te prave, npr. M i N (sl. 1); odgovarajuće tačke M' i N' određuju samo jednu pravu — to je prava a' simetrična sa a u odnosu na s .

Zadatak 1. — Dokazati da se prava p paralelna osi simetrije s preslikava u pravu p' koja je takođe paralelna s .

Dokaz. — Neka su M i N dve proizvoljne tačke prave p (sl. 2); njima odgovarajuće tačke M' i N' su sa druge strane ose s i takve da je $MM' \parallel NN'$ (i $\perp s$) i $MM' = NN'$, tj. $S_1 M' = S_2 N'$. Odatle zaključujemo da je $M'N' \parallel S_1 S_2$, pa samim tim je i prava p' , određena tačkama M' i N' , paralelna osi s (i paralelna pravoj p).



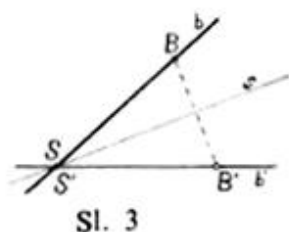
Sl. 1



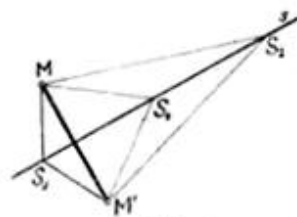
Sl. 2

2. Ma koja tačka S ose s preslikava se u sebe samu. (Zašto? Gde se nalazi S' ? Koliko je rastojanje tačke S od ose s ?). Zato kažemo: prilikom osno simetričnog preslikavanja, sve tačke koje se nalaze s jedne strane ose preslikavaju se u tačke koje leže s druge strane ose; *jedino tačke ose s ostaju pri tom nepokretne.*

Na osnovu toga jasno je da, ako prava b seče osu s u tački S , tada će i simetrična prava b' seći osu s , i to u ovoj istoj tački S . — Zaista, tačka S na osi simetrije s preslikava se u sebe samu (sl. 3), tj. njena simetrična tačka S' poklapa se sa njom: $S' \equiv S$ (čitaj: S' identično, ili istovetno sa S). To znači da prava b' simetrična pravoj b prolazi kroz tačku S .



Sl. 3



Sl. 4

Zadatak 2. — Prava b seče osu s . Konstruisati pravu b' simetričnu sa b .

Prema prethodnom, b' mora sadržati tačku S u kojoj se seku b i s ; stoga je dovoljno da na pravoj b uočimo samo još jednu tačku, npr. tačku B (sl. 3). Odredimo na poznati način simetričnu tačku B' ; tačke S i B' određuju pravu b' simetričnu sa b . — Kao što se vidi, ova konstrukcija je još prostija nego ona na sl. 1.

Kako je, zbog simetričnosti, $BC = B'C = \frac{1}{2}BB'$ i $BB' \perp s$, to je s simetrala duži BB' . Pri tom se SB preslikava u $S'B'$, što znači da je $SB = SB' (=S'B')$, tj. da je tačka S simetrale duži BB' podjednako udaljena od krajnjih tačaka te duži.

Na osnovu toga jasno je da, ako je s simetrala duži MM' (sl. 4), tada za sve tačke $S_1, S_2, S_3, \dots$ na simetrali važi:

$$S_1 M = S_1 M', \quad S_2 M = S_2 M', \quad S_3 M = S_3 M', \dots$$

To je karakteristično svojstvo simetrale duži, koje iskazujemo na sledeći način:

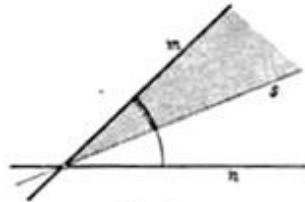
Svaka tačka simetrale duži jednako je udaljena od krajnjih tačaka te duži.

To istovremeno znači da, ako smo za neku tačku C utvrdili da je jednako udaljena od dveju datih tačaka A i B , takva tačka C nalazi se na simetrali duži AB . Ako smo pak za neku tačku D utvrdili da nije jednako udaljena od datih tačaka A i B , to znači da D nije na simetrali duži AB .

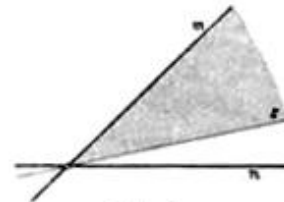
3. Osa simetrije dveju pravih koje se seku polovi ugao između tih pravih. — Zaista, na sl. 3 je $\triangle SCB$ simetričan — pa samim tim i podudaran — sa $\triangle SCB'$; stoga je $\sphericalangle BSC = \sphericalangle B'SC$.

Ako, u ravni, tri prave m , n i s prolaze kroz istu tačku i s je između m i n , kako možemo utvrditi da je s osa simetrije pravih m i n ili da to nije?

Ako je $\sphericalangle(m, s) = \sphericalangle(n, s) = \frac{1}{2} \sphericalangle(m, n)$, tada je s osa simetrije pravih m i n (sl. 5); ako je $\sphericalangle(m, s) \neq \sphericalangle(n, s)$, tada s nije osa simetrije tih pravih (sl. 6).



Sl. 5



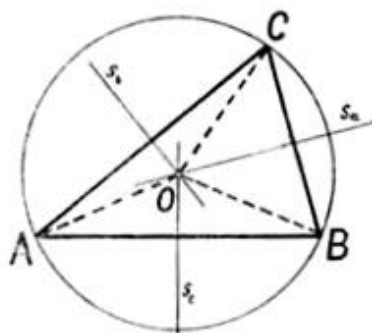
Sl. 6

4. Na osnovu pomenutog karakterističnog svojstva simetrale duži možemo dokazati sledeće tvrđenje:

Sve tri simetrale trouglovih stranica seku se u jednoj tački; ta tačka je centar opisanog kruga trougla.

(Kao što znamo, krug na kojem leže sva tri temena trougla zove se opisani krug trougla.)

Dokaz je lak. Konstruišimo najpre (sl. 7) simetralu s_a stranice BC i simetralu s_b stranice AC ; njihova presečna tačka je O . Kako je O na simetrali s_a , to je $OB = OC$, a kako je O i na simetrali s_b , to je $OC = OA$. Odatle je $OB = OC = OA$, to jest $OA = OB$, a to znači da se O nalazi i na simetrali s_c treće stranice AB . Dakle, zaista se sve tri simetrale seku u jednoj tački.



Sl. 7

Iz $OA = OB = OC$ zaključujemo da su sva tri temena A , B , C trougla ABC jednako udaljena od tačke O ; stoga se iz O kao centra može opisati krug koji prolazi kroz sve tri tačke A , B , C .

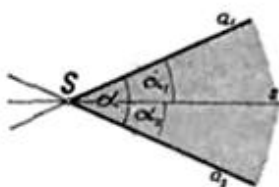
5. Krug koji prolazi kroz sva temena mnogougla (poligona) zove se opisani krug mnogougla (poligona). Takav krug se može konstruisati jedino ako se simetrale svih stranica mnogougla seku u jednoj tački. Objasnite zašto!

III

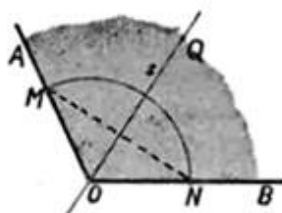
1. Ranije smo utvrdili da osa simetrije s dveju pravih a_1 i a_2 koje se seku (sl. 1) deli ugao α između tih pravih na dva jednaka ugla α_1 i α_2 , to jest $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha$, pri tome se misli na jedan, bilo koji ugao *u kojem* leži osa s . Drugim rečima, u odnosu na osu s ugao α_1 preslikava se u jednak susedni ugao α_2 (sa kojim ima zajedničko teme S i zajednički krak s), i obrnuto. Na osnovu toga, **prava koja prolazi kroz teme ugla i polovi taj ugao je osa simetrije ugla**; tu osu nazivamo, kratko, i **simetralom ugla**.

Zadatak 1. — Konstruisati simetralu datog ugla AOB (sl. 2).

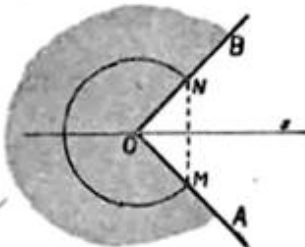
Rešenje. — Kao što smo videli, simetrala ugla s je u isto



Sl. 1



Sl. 2a



Sl. 2b

vreme i osa simetrije krakova toga ugla. Ova osa prolazi kroz teme O toga ugla (zašto?), a dve proizvoljne tačke M i N odabrane na kracima OA i OB tako da je $OM = ON$ simetrične su u odnosu na tu osu. Na osnovu toga izvodi se tražena konstrukcija:

1) najpre se pomoću šestara na kracima ugla odrede tačke M i N na jednakom rastojanju od temena O (iz centra O preseku se kružnim lukom oba kraka);

2) na poznati način odredi se, pomoću šestara, tačka Q na simetrali duži MN , i

3) povuče se prava OQ — to je istovremeno i simetrala duži MN , i osa simetrije polupravih OA i OB , i tražena simetrala ugla AOB .

Na sl. 2 b konstruisana je simetrala konkavnog ugla; zapazimo da se u tom slučaju duž MN nalazi **van** datog ugla.

Objasnite: a) konstrukciju normale u datoj tački A prave a ; b) postupak deljenja datog ugla na dva jednaka ugla.

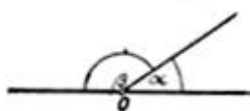
2. Sada ćemo posmatrati dva naporedna ugla, tj. dva ugla α i β sa istim temenom i jednim zajedničkim krakom čiji je zbir 180° (sl. 3a).

Zadatak 2. — Konstruisati simetrale dvaju naporednih uglova i dokazati da se one seku pod pravim uglom.

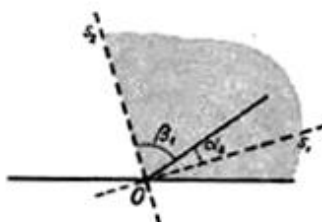
Rešenje. — Pošto se simetrale s_1 i s_2 konstruišu na već pokazani način (sl. 3 b), preostaje da se dokaže da je ugao između simetrala s_1 i s_2 (koji ćemo obeležiti sa γ) prav.

Znamo da simetrala s_1 deli ugao α na dva jednaka ugla α_1 i α_2 , a simetrala s_2 deli ugao β na dva jednaka ugla β_1 i β_2 ; zbog toga je $\gamma = \alpha_2 + \beta_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; kako su pak uglovi α i β naporedni, tj. $\alpha + \beta = 180^\circ$, to je zaista $\gamma = 90^\circ$, što je i trebalo dokazati.

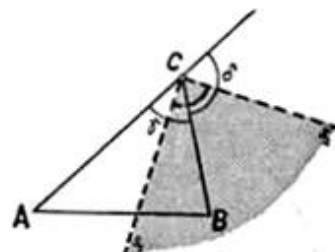
Na osnovu zad. 2 sad je lako rešiti i sledeće zadatke:



Sl. 3a

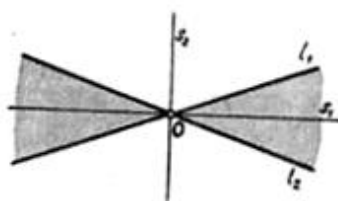


Sl. 3b

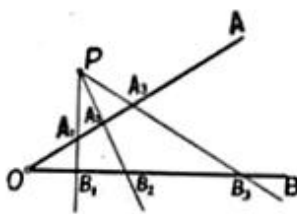


Sl. 4

Zadatak 3. — Dokazati da se simetrala unutrašnjeg i simetrala susednog spoljašnjeg ugla trougla seku pod pravim uglom (sl. 4).



Sl. 5



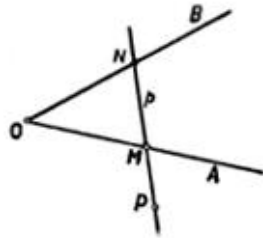
Sl. 6

Zadatak 4. —

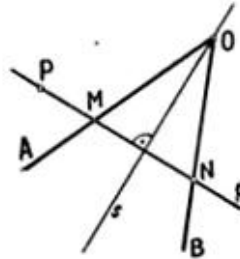
Za dve prave koje se seku (l_1 i l_2 na sl. 5) mogu se povući dve ose simetrije (s_1 i s_2); dokazati da se te ose seku pod pravim uglom.

3. Uočimo u ravni ugao AOB i tačku P van toga ugla (sl. 6). Očigledno, kroz tačku P možemo povući koliko god želimo pravih koje seku krak OA redom u tačkama $A_1, A_2, A_3, \dots$; pri tom su odgovarajući odsecci OA_1 i OB_1 , OA_2 i OB_2 , OA_3 i $OB_3, \dots$ različite dužine. U vezi s tim je i sledeći zadatak iz prakse:

Trasiranje nove ulice. — U jednom novom naselju (sl. 7a) u kojem su već izgrađene ulice OA i OB , treba izgraditi novu ulicu koja prolazi od trga P i seče ulice OA i OB tako da su dužine OM i ON jednake. Kako treba trasirati novu ulicu?



Sl. 7a.



Sl. 7b

Postavljeni zadatak najpre ćemo formulirati geometrijski:

Zadatak 5. — Kroz tačku P van ugla AOB povući pravu p tako da ona od krakova tog ugla odseca jednake odsečke: $OM = ON$ (sl. 7a).

Rešenje. — Kako se zahteva da bude $OM = ON$, to znači da su tačke M i N (preseči prave p i krakova OA i OB) simetrične jedna drugoj u odnosu na simetralu s ugla AOB . Prema tome, na kracima OA i OB treba odrediti dve simetrične tačke M i N tako da prava MN prolazi kroz tačku P i da je normalna na s . Na osnovu toga se tražena konstrukcija izvodi na sledeći način:

1) najpre se konstruiše simetrala s ugla AOB (a to je i simetrala krakova OA i OB , sl. 7b), i

2) zatim se kroz tačku P povuče prava normalna na s ; to je tražena prava p .

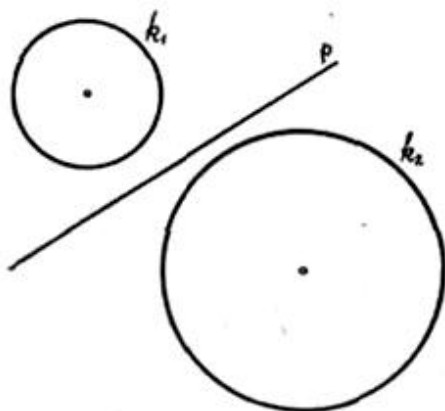
Zaista, kako je prava p normalna na s , njeni preseči M i N sa kracima OA i OB simetrični su u odnosu na s , što znači, na osnovu poznatog svojstva simetrale duži, da $OM = ON$, a to je i trebalo dokazati.

Žapazimo da se osa s i tražena prava p seku u uglu AOB ; ako bi se one sekle van tog ugla, tada bi prava p sekla produžene krake ugla AOB , te postavljeni zadatak ne bi imao rešenje.

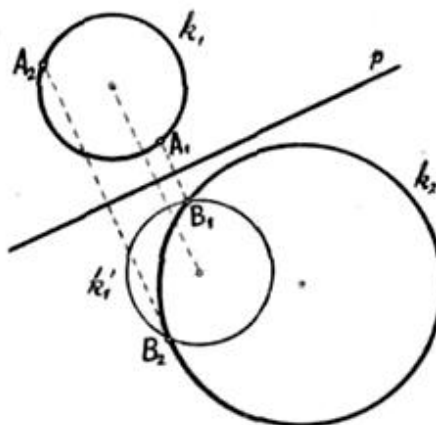
Rešenjem zadatka 5 dato nam je i rešenje praktičnog zadatka o trasiranju nove ulice.

4. Evo još jednog primera u kojem se koristi osna simetrija:

Zadatak 6. — U ravni su dati prava p i dva nejednaka kruga k_1 i k_2 sa raznih strana prave p (sl. 8a); odrediti na krugu k_1 tačku A i na krugu k_2 tačku B tako da je odsečak $AB \perp p$ i da su odstojanja tačaka A i B od prave p jednaka.



Sl. 8a



Sl. 8b

Rešenje. — Prema uslovu postavljenom u zadatku, treba odrediti tačke A i B tako da prava p bude osa simetrije odsečka AB .

Da bismo zadatak rešili, poći ćemo od činjenice da, ako se sl. 8a presavije duž prave p , tada će se simetrične tačke poklopiti. Umesto da presavijemo sliku, mi ćemo krug k_1 preslikati simetrično u odnosu na pravu p ; dobićemo krug k_1' ; tačke B_1 i B_2 zajedničke krugovima k_1' i k_2 i njima simetrične tačke A_1 i A_2 na krugu k_1 jesu tražene tačke (jer je $A_1B_1 \perp p$ i $A_1P_1 = B_1P_1$, $A_2B_2 \perp p$ i $A_2P_2 = B_2P_2$).

S obzirom na položaj krugova k_1 i k_2 postoje sledeće mogućnosti:

- 1) krugovi k_1' i k_2 se seku; tada zadatak ima dva rešenja, tj. dva para tačaka zadovoljavaju postavljeni uslov;
- 2) krugovi k_1' i k_2 se dodiruju; zadatak ima jedno rešenje; tj. postoji samo jedan par tačaka koji zadovoljava postavljeni uslov;
- 3) krugovi k_1' i k_2 nemaju zajedničkih tačaka; zadatak nema rešenja, što znači da na krugovima k_1 i k_2 ne postoji nijedan par tačaka koji zadovoljava postavljeni uslov.