Војислав Андрић,
Ваљево, Србија

ГОЛДБАХОВА ХИПОТЕЗА

Скуп природних бројева садржи три дисјунктна подскупа: { 1 }, {2, 3, 5, 7, 11, 13,17 ...} и { 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...}. Први поскуп садржи само један природан број и то је број 1 који има само један делилац. Елементи другог скупа су природни бројеви који имају само два делиоца (јединицу и самог себе). Тај скуп се назива скуп простих бројева и најчешће обележава са P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...}. Трећи скуп садржи природне бројеве који имају три и више делилаца и називају се сложени бројеви. Скуп сложених бројева се најчешће обележава са S = { 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, ...}.

Проблемима простих и сложених бројева бавили су се још математичари старих цивилизација, па су многи проблеми везани за просте и сложене бројеве давно решени. Тако је Еуклид (325 – 265 п.н.е) у свом капиталном делу "Елементи" (књига 9. - тврђење 20.) доказао да простих бројева има бесконачно много, а Ератостен (276 – 194 п.н.е) је формулисао једноставан алгоритам за раздвајање простих од сложених бројева који је данас познат као Ератостеново сито.

Међутим, многи проблеми везани за просте и сложене бројеве остали су нерешени и до наших дана. Посматрањем парних бројева већих од 2 може се уочити да је

$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 5 + 5 = 3 + 7$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 7 + 7 = 3 + 11$$
$$16 = 3 + 13 = 5 + 11$$
$$18 = 5 + 13 = 7 + 11$$
$$20 = 3 + 17 = 7 + 13$$
$$22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$$
$$24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$$

....

Пруски математичар Кристијан Голдбах (1690-1764) је 7. јуна 1742. године послао писмо Леонарду Ојлеру (1707 – 1783) у коме је исказао следећу претпоставку: Сваки непаран број већи од 5 се може представити у облику суме три проста броја. Данас је у математичкој литератури овај проблем познат као слабија Голдбахова хипотеза.

Ојлер се заинтересовао за добијени проблем и формулисао своју хипотезу: Сваки паран број већи од 2, може се приказати у облику збира два проста броја. Ојлерова формулација је проблема је конструктивнија, јер је јасно да ако се на сваки паран број дода прост број 3, онда се добија слабија Голдбахова хипотеза. Ојлерова формулација проблема се данас у математичкој науци посматра као јача Голдбахова хипотеза.

Јача (а и слабија) Голдбахова хипотеза још увек није решена, тј. до данас није доказано да се сваки паран природан број већи од два може приказати као збир два проста броја.

У међувремену су Виноградов 1937. године и Теодор Естерман 1938. године показали, да скоро сви парни бројеви могу представити у облику збира два проста броја и да ако постоје парни бројеви који се не могу представити као збир два проста броја, онда њихов број тежи ка нули. Тај резултат су 1975. године значајно поправили Хуго Монтгомери (Hugh Montgomery) и Роберт Чарлс Воган (Robert Charles Vaughan) који су показали да постоје позитивне константе c и C, такве да је број парних бројева не већих од N, који се не могу представити у облику збира два проста броја, не прелази CN^{1-c}.

Шнирељман је 1939. године доказао да се сваки прост број може приказати у облику збира не више од 300 000 простих бројева. Тај резултат је 1995. године много побољшао Ремер (Ramaré) који је доказао, да се сваки паран број може приказати као сума највише 6 простих бројева.

Чен Цзин-жун (Chen Jingrun) је 1966. године године доказао да се сваки довољно велики паран број може приказати као збир или два проста броја или у облику збира простог броја и полупростог броја (броја који представља производ два проста броја). На пример $100 = 23 + 7\cdot 11$ или $2000 = 17 + 3 \cdot 661$

Развојем компјутерске технологије Голдбахова хипотеза постаје интересантна и за компјутерске стручњаке па је 2000. године истраживањем природних бројева у интервалу $[1, 10^{14}]$, на пример, добијено да је паран број 389965026819938 = 5569 + 389965026814369. У марту 2004. године јача Голбахова хипотеза је проверена и доказана на компјутеру за све парне бројеве који не прелазе $2 \cdot 10^{17}$.

Нашим читаоцима препоручујемо да своја истраживања везана за Голбахову хипотезу започну самосталним решавањем следећих проблема:

1. Да ли се сваки непаран број већи од 3 може приказати као збир два проста броја?
2. Докажи да се сваки паран природан већи од 2 може приказати као збир два сложена броја.
3. Паран број 2022 приказати као збир једног простог и једног полупростог броја, тј. у облику $p + q \cdot r$, где су p, q и r прости бројеви.
4. Докажи Голдбахову хипотезу за све парне бројеве мање од 77.
5. Уочимо да важе једнакости: $2^2 = 4 = 2 + 2$, $3^2 = 9 = 2 + 7$, $4^2 = 16 = 3 + 13$,
   $5^2 = 25 = 2 + 23$ ... Да ли се квадрат сваког природног броја већег од 1 може приказати у облику збира два проста броја?
6. Колико има природних бројева који се не могу приказати као збир два сложена броја?
7. Докажи да се сваки природан број већи од 3 може приказати као збир два или више простих бројева.

Можда ће идеје садржане у овим задацима некоме од младих математичара помоћи да реше и Голдбахову хипотезу или их бар их инспирисати за даља истраживања у правцу решавања овог проблема који ево више од 250 година одолева настојањима математичара да, попут чувене Велике Фермаове теореме и Голдбахову хипотезу скину са списка нерешених математичких проблема.

У том смислу младим математичарима препоручујемо и да обавезно прочитају књигу: Апостолас Доксиаисдис – Чика Петрос и Голдбахова хипотеза (Плато, Београд 2003. године), али и да се путем Интернета још детаљније информишу о Голдбаховој хипотези и осталим нерешеним проблемима везаним за просте бројеве, какав је, на пример, проблем простих бројева близанаца.