Singularna dekompozicija matrice reda 2

Vida Zadelj-Martić, Zagreb*

Sažetak. U članku se izvodi efikasna metoda za računanje singularne dekompozicije trokutaste i opće matrice reda 2. Tipična primjena ove metode je njeno korištenje u sklopu tzv. dijagonalizacijskih metoda za singularnu dekompoziciju matrica reda n. Također, služi za brzo i točno određivanje norme, ranga i generaliziranog inverza općih matrica reda dva. Stoga može poslužiti za rješavanje problema najmanjih kvadrata u dvije dimenzije. Opis metode je prilagođen radu s kalkulatorom ili računalom.

Uvod

Singularna dekompozicija (ili singularni rastav) matrice je jedna od najvažnijih matričnih dekompozicija, kako za teorijske, tako i za razne računske potrebe. Algoritmi za računanje te dekompozicije često se koriste u sklopu složenijih algoritama za rješavanje stvarnih problema u gospodarstvu, industriji i znanosti. Mi ćemo se ovdje pozabaviti računanjem singularne dekompozicije u najjednostavnijem slučaju, kad je matrica reda 2.

Neka je A proizvoljna matrica reda 2. Singularna dekompozicija matrice A je svaki rastav oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} V^\tau = U\Sigma V^\tau \,, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \,, \tag{1}$$

gdje su U i V ortogonalne matrice reda 2, a τ je znak za transponiranje matrica. Ovdje je Σ dijagonalna matrica reda 2, čiji dijagonalni elementi σ_1 i σ_2 su nenegativni realni brojevi koje nazivamo singularne vrijednosti od A. Također, stupce od U i V nazivamo lijevi i desni singularni vektori od A, respektivno. Prvi stupac od U (V) je lijevi (desni) singularni vektor od A koji pripada singularnoj vrijednosti σ_1, dok je drugi stupac od U (V) lijevi (desni) singularni vektor od A koji pripada singularnoj vrijednosti σ_2.

Ortogonalna matrica je kvadratna (realna) matrica koja zadovoljava uvjet $Q^\tau Q = I$ gdje je I jedinična matrica istog reda. Njen inverz je Q^τ, pa zato Q zadovoljava i uvjet $QQ^\tau = I$, koji se također može koristiti u definiciji. Uvjet $Q^\tau Q = I$ ($QQ^\tau = I$) znači da su stupci (redci) od Q ortonormirani tj. imaju duljinu jedan i ortogonalni su jedan prema drugome.

Ortogonalne matrice reda 2 su ili rotacije ili reflektori u ravnini, pa proizvoljna ortogonalna matrica W reda 2 ima jedan od sljedeća dva oblika

$$W = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad W = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}.$$

Pritom je $\phi \in [0\,,2\pi]$ kut kojim je određena matrica W. Za prvi oblik kažemo da je ravninska rotacija, dok je drugi reflektor. Mi ćemo u ovom prikazu koristiti

* Autorica je viši predavač na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

rotacije. Uočimo da se reflektor lako dobije iz rotacije množenjem slijeva ili zdesna dijagonalnom matricom čiji jedan dijagonalni element je 1, a drugi -1. Više o singularnoj dekompoziciji i algoritmima za njeno izračunavanje može se naći npr. u poznatoj knjizi Matrix Computations [1].

Cilj nam je prikazati jedan računski postupak (algoritam) za računanje singularne dekompozicije matrice A reda 2. Pritom ćemo koristiti tzv. stabilne formule, pomoću kojih se i pomoću kalkulatora, a pogotovo pomoću jednostavnog računalnog programa u nekom programskom jeziku, mogu izračunati singularne vrijednosti i vektori do točnosti koju pruža kalkulator ili računalo koje koristimo.

Postupak ima dvije faze. U prvoj koristimo jednu rotaciju da dovedemo polaznu matricu A na gornjetrokutasti oblik. Takva rotacija se zove Givensova rotacija, a postupak svođenja matrice A na gornjetrokutastu matricu T, naziva se Givensova metoda. Ta metoda postoji i za opće $m \times m$ matrice, a ovdje ćemo ju izvesti za matrice reda 2.

Givensova metoda

Neka A ima elemente a, b, d i e, kao u relaciji (1). Tada se Givensova metoda može opisati matričnom relacijom

$$G^\tau A = T \quad \text{ili po elementima} \quad \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix},$$

gdje je G ravninska rotacija za kut θ, a c i s kraće oznake za $\cos\theta$ i $\sin\theta$, respektivno. Ako c i s definiramo pomoću formula

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}, \qquad s = \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}, \tag{2}$$

tada množenjem matrica G^τ i A dobijemo

$$G^\tau A = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca+sd & cb+se \\ -sa+cd & -sb+ce \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdje je

$$\begin{aligned} f &= ca+sd = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}a + \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}d = \frac{a^2+d^2}{\sqrt{a^2+d^2}} = \sqrt{a^2+d^2}, \\ g &= cb+se = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}b + \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}e = \frac{ab+de}{\sqrt{a^2+d^2}}, \\ 0 &= -sa+cd = -\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}a + \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}d \quad \text{(ovo je tek provjera)}, \\ h &= -sb+ce = -\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}b + \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}e = \frac{-bd+ae}{\sqrt{a^2+d^2}}. \end{aligned}$$

Uočimo da se c i s ne mogu izračunati samo ako je nazivnik $\sqrt{a^2+d^2}$ jednak nula. No, tada Givensova redukcija na gornjetrokutasti oblik, zapravo nije niti potrebna, jer je A već gornjetrokutasta. Štoviše, Givensova redukcija nije potrebna čim je $d = 0$!

Vidimo da je algoritam za Givensovu redukciju vrlo jednostavan i možemo ga lako izračunati pomoću kalkulatora ili računalnog programa. Prvo izračunamo c i s pomoću formula (2), a zatim netrivijalne elemente f, g i h gornjetrokutaste matrice T pomoću zadnjih relacija.

Priprema za drugu fazu

Za potrebe druge faze algoritma, poželjno je da bude i $h \geq 0$. To lako postignemo množeći drugi stupac matrice T s predznakom od h, $\operatorname{sgn}(h)$. Pomoću matričnog množenja, tu transformaciju možemo opisati relacijom

$$\tilde{T} = TP \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} f & g \cdot \operatorname{sgn}(h) \\ 0 & |h| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(h) \end{bmatrix}.$$

Kako je $\operatorname{sgn}(h)$ jednako 1 ili -1, P je ortogonalna i za nju još vrijedi $P^\tau = P$, pa je $P^2 = I$. Stoga iz $\tilde{T} = TP = G^\tau AP$ slijedi $A = G\tilde{T}P$.

Sada smo problem singularnog rastava matrice A sveli na problem singularnog rastava matrice $\tilde{T}$. Doista, ako nađemo rotacije R_1 i R_2, takve da je

$$\tilde{T} = R_1 \Sigma R_2^\tau, \quad \text{tada je} \quad A = G\tilde{T}P = G(R_1 \Sigma R_2^\tau)P = (GR_1)\Sigma(PR_2)^\tau,$$

pa treba samo staviti $U = GR_1$ i $V = PR_2$. Pritom je U kao produkt dviju rotacija opet rotacija (s kutom koji je jednak zbroju kutova rotacija R_1 i G), dok je V ili rotacija R_2 (kad je $\operatorname{sgn}(h) = 1$) ili reflektor (kad je $\operatorname{sgn}(h) = -1$).

Za računanje singularnog rastava matrice $\tilde{T}$, koristit ćemo tzv. Kogbetliantzovu metodu.

Kogbetliantzova metoda

Iako je Kogbetliantzova metoda definirana za opće trokutaste matrice reda n, mi ćemo ju ovdje izvesti i opisati za slučaj $n = 2$, slijedeći ideje iz članka [2]. Za taj slučaj, metoda određuje matrice rotacije R_φ i R_ψ, takve da je $T' = R_\varphi^\tau T R_\psi$ dijagonalna matrica, pri čemu polazna matrica T može biti proizvoljna gornjetrokutasta. Gledajući matrice po elementima, mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdje su $c_\varphi = \cos\phi$, $s_\varphi = \sin\phi$ i $c_\psi = \cos\psi$, $s_\psi = \sin\psi$, a T' je dijagonalna s dijagonalnim elementima f' i h'. Dakle, R_φ i R_ψ su određene kutovima ϕ i ψ. Kad izvedemo postupak za računanje elemenata matrica T', R_φ i R_ψ, onda ga možemo primijeniti na matricu $\tilde{T}$ iz prethodnog odjeljka.

Određivanje matrica R_φ i R_ψ

Jednadžbu (4), odnosno $T' = R_\varphi^\tau T R_\psi$, možemo napisati kao $R_\varphi T' = T R_\psi$ ili $T' R_\psi^\tau = R_\varphi^\tau T$, ovisno o tome množimo li jednakost (4) s R_φ s lijeve, ili s R_ψ^τ s desne strane. To možemo zapisati po elementima

$$\begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi \\ -s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}.$$

Množeći matrice na lijevim i desnim stranama, dobijemo

$$\begin{bmatrix} c_\varphi f' & -s_\varphi h' \\ s_\varphi f' & c_\varphi h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f c_\psi + g s_\psi & -f s_\psi + g c_\psi \\ h s_\psi & h c_\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f' c_\psi & f' s_\psi \\ -h' s_\psi & h' c_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f c_\varphi & g c_\varphi + h s_\varphi \\ -f s_\varphi & -g s_\varphi + h c_\varphi \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata matrica na lijevoj i desnoj strani, dobivamo

$$\begin{aligned} f' &= \frac{c_\varphi}{c_\psi} f = \frac{s_\psi}{s_\varphi} h = \frac{c_\psi}{c_\varphi} f + \frac{s_\psi}{c_\varphi} g = \frac{s_\varphi}{s_\psi} h + \frac{c_\varphi}{s_\psi} g, \\ h' &= \frac{c_\psi}{c_\varphi} h = \frac{s_\varphi}{s_\psi} f = \frac{c_\varphi}{c_\psi} h - \frac{s_\varphi}{c_\psi} g = \frac{s_\psi}{s_\varphi} f - \frac{c_\psi}{s_\varphi} g. \end{aligned}$$

Za potrebe računanja, uzet ćemo najjednostavnije formule

$$f' = \frac{c_\varphi}{c_\psi} f \quad \text{i} \quad h' = \frac{c_\psi}{c_\varphi} h. \tag{5}$$

Direktnim računanjem elemenata matrice T', u relaciji (4), dobivamo

$$T' = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\psi f + c_\varphi s_\psi g + s_\varphi s_\psi h & -c_\varphi s_\psi f + c_\varphi c_\psi g + s_\varphi c_\psi h \\ -s_\varphi c_\psi f - s_\varphi s_\psi g + c_\varphi s_\psi h & s_\varphi s_\psi f - s_\varphi c_\psi g + c_\varphi c_\psi h \end{bmatrix}.$$

To daje sljedeće jednadžbe

$$f' = c_\varphi c_\psi f + c_\varphi s_\psi g + s_\varphi s_\psi h, \quad h' = s_\varphi s_\psi f - s_\varphi c_\psi g + c_\varphi c_\psi h, \tag{6}$$

$$0 = -c_\varphi s_\psi f + c_\varphi c_\psi g + s_\varphi c_\psi h, \tag{7}$$

$$0 = -s_\varphi c_\psi f - s_\varphi s_\psi g + c_\varphi s_\psi h. \tag{8}$$

Kako za računanje f' i h' već imamo formule (5) koje su jednostavnije od onih u (6), preostaje samo izračunati elemente matrica rotacija R_φ i R_ψ pomoću relacija (7) i (8). Još kažemo da izvodimo formule za kutove.

Formule za kutove

Primijetimo da relacije (7) i (8) možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} c_\varphi g + s_\varphi h & -c_\varphi f \\ -s_\varphi f & c_\varphi h - s_\varphi g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi \\ s_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

Stoga što je vektor $[c_\psi\,,\, s_\psi]^T$ uvijek različit od nul-vektora, zaključujemo da determinanta matrice drugog reda, mora biti jednaka nuli. Iz toga slijedi

$$s_\varphi c_\varphi \left(-f^2 - g^2 + h^2\right) - s_\varphi^2 hg + c_\varphi^2 gf = 0,$$

Ako koristimo formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta, dobivamo

$$\tan 2\varphi = \frac{2hg}{f^2 - h^2 + g^2}\,. \tag{10}$$

Iz formule (10) možemo izračunati $t_\varphi = \tan\varphi$, a pomoću t_φ lako izračunamo c_φ i s_φ. Kut 2φ možemo birati iz intervala $(-\pi/2\,,\,\pi/2]$, tako da kut φ bude iz intervala $(-\pi/4\,,\,\pi/4]$.

Kako najefikasnije izračunati t_φ iz $\tan 2\varphi$? Postupak je sljedeći. Izračunajmo vrijednost razlomka u (10) i označimo ga s α. Nakon toga iskoristimo formulu za tangens dvostrukog kuta i relaciju (10),

$$\frac{2t_\varphi}{1 - t_\varphi^2} = \alpha \qquad \text{što daje} \qquad \alpha t_\varphi^2 + 2t_\varphi - \alpha = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe po t_φ, dobijemo

$$t_\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha}.$$

Kako je kut φ iz intervala $(-\pi/4\,,\,\pi/4]$, t_φ i $\tan 2\varphi = \alpha$ imaju isti predznak. Međutim α i t_φ mogu imati isti predznak samo ako je brojnik u zadnjoj relaciji pozitivan. Dakle je

$$t_\varphi = \frac{-1 + \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + 1}{\sqrt{\alpha^2 + 1} + 1} = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}. \tag{11}$$

Ova zadnja formula (za razliku od prve) nema opasnost kraćenja vodećih znamenaka kod oduzimanja (u brojniku, kad je $|\alpha|$ malo), pa ju treba koristiti. Također, za razliku od prve formule, dobro je definirana kad je $\alpha = 0$. Sada se c_φ i s_φ dobiju iz relacija

$$c_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + t_\varphi^2}}, \quad s_\varphi = \frac{t_\varphi}{\sqrt{1 + t_\varphi^2}}. \tag{12}$$

Nakon uvrštavanja tako izračunatih c_φ i s_φ u jednadžbe (9), one postaju proporcionalne, tj. predstavljaju istu jednadžbu za kut ψ. Iz prve proizlazi

$$\tan\psi = \frac{g + ht_\varphi}{f}, \quad \text{a iz druge} \quad \tan\psi = \frac{f\,t_\varphi}{h - gt_\varphi}\,. \tag{13}$$

Kut ψ možemo birati iz intervala $(-\pi/2\,,\,\pi/2]$. Obje formule u (13) daju istu vrijednost za $\tan\psi$. Koristeći $t_\psi = \tan\psi$, c_ψ i s_ψ se izračunaju kao u relaciji (12).

Primijetimo da zbog izabranog intervala za kutove uvijek vrijedi $|t_\varphi| \le 1$ i $c_\varphi \ge \sqrt{2}/2$, dok je $c_\psi \ge 0$. Ako f nije nula, onda iz relacije (13) slijedi $c_\psi > 0$, pa formule (5) pokazuju da f' i f, kao i h' i h imaju iste predznake. To znači, ako

Kogbetliantzovu metodu primijenimo na matricu $\tilde{T}$ kod koje su i f i h pozitivni, onda su f' i h' pozitivni, a to znači da su f' i h' singularne vrijednosti.

Na sličan način možemo dobiti postupak u kojem se prvo određuje $\tan\psi$ iz $\tan 2\psi$, a nakon toga $\tan\varphi$. Iz tih vrijednosti također možemo dobiti vrijednosti za c_ψ, s_ψ, c_φ, s_φ.

Primjer 1. Neka je matrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

Za ovaj primjer koristimo običan kalkulator. Prvo Givensovom metodom poništavamo element na poziciji $(2,1)$, te na taj način dobivamo gornje trokutastu matricu T.

Iz relacija (2) slijedi

$$c = \frac{9}{\sqrt{9^2+12^2}} = 0.6, \qquad s = \frac{12}{\sqrt{9^2+12^2}} = 0.8\,. \tag{14}$$

Tada iz (3) proizlazi

$$G^\tau A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5.2 \\ 0 & 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Iz formule (10) za tangens dvostrukog kuta φ dobivamo

$$\tan 2\varphi = \frac{2gh}{f^2+g^2-h^2} = 0.05822137 \tag{16}$$

i odatle

$$t_\varphi = \frac{0.05822137}{1+\sqrt{1+0.05822137^2}} = 0.02908606.$$

Stoga je

$$c_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t_\varphi^2}} = 0.9995773, \quad s_\varphi = \frac{t_\varphi}{\sqrt{1+t_\varphi^2}} = 0.02907376\,.$$

Nadalje, iz (13) dobivamo

$$t_\psi = \tan\psi = \frac{5.2+1.4\,t_\varphi}{15} = 0.3493814,$$

pa je

$$c_\psi = \frac{1}{\sqrt{1+t_\psi^2}} = 0.9440403, \quad s_\psi = \frac{t_\psi}{\sqrt{1+t_\psi^2}} = 0.3298301.$$

Na taj način su definirani svi elementi na desnoj strani relacije (4), pa se mogu odrediti i elementi f' i h'.

$$f' = \frac{c_\varphi}{c_\psi} f = \frac{0.9983094}{0.9432389} \cdot 15 = 15.882436,$$
$$h' = \frac{c_\psi}{c_\varphi} h = \frac{0.9432389}{0.9983094} \cdot 1.4 = 1.3222153.$$

Konačna dijagonalna forma matrice A, ako koristimo relacije (3) i (4), ima oblik

$$\Sigma = \begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} = U^\tau A V.$$

Pri tome je

$$U = \left(\begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \right)^\tau = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c - s_\varphi s & -s_\varphi c - c_\varphi s \\ c_\varphi s + s_\varphi c & c_\varphi c - s_\varphi s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi) \\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix},$$

gdje je $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$. Kad računamo U, onda koristimo prvi prikaz matrice u drugom redu, jer nas kutovi ne zanimaju. Kako je element h bio pozitivan, matrica V je baš rotacija R_ψ. Dakle, singularna dekompozicija matrice A ima oblik

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^\tau \\ &= \begin{bmatrix} 0.5764874 & -0.8171061 \\ 0.8171061 & 0.5764874 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.882436 & 0 \\ 0 & 1.3222153 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9440403 & 0.3298301 \\ -0.3298301 & 0.9440403 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Spomenimo na kraju da u slučaju kad dobijemo $f' < h'$, moramo staviti $\sigma_1 = h'$ i $\sigma_2 = f'$, jer je uvijek $\sigma_1 \geq \sigma_2$. U tom slučaju načinimo sljedeće: zamijenimo dijagonalne elemente f' i h' u T' i također zamijenimo stupce u izračunatim matricama U i V. Provjerite da se produkt matrica $U\Sigma V^\tau$ nakon tih zamjena nije promijenio!

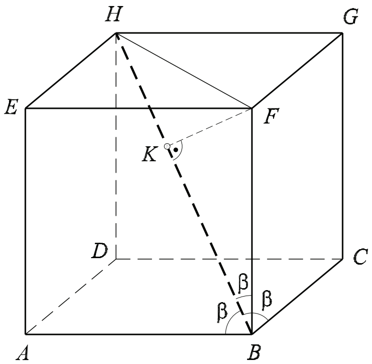
Literatura

[1] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 2nd edition, 704 West 40th Street, Baltimore, Maryland 21211, 1989.

[2] Hari V., Matejaš J., *An Accurate SVD Algorithm for 2×2 Triangular Matrices*, ICNAAM, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006, ed. Simos T.E. et al. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006. p.p. 143–146.

Kako kocku provući kroz isto tako veliku kocku?

Željko Hanjš, Zagreb



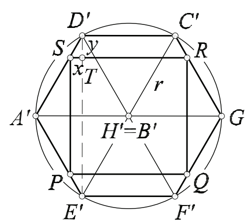
Da li se iz drvene kocke može izrezati otvor kroz koji se može provući isto takva kocka?

Izgleda neobično! A uskoro ćemo vidjeti da se zaista može, čak štoviše, može se provući i veća kocka. Kako velika može biti kocka koja se može provući kroz polaznu?

Da to pokažemo, projicirajmo kocku $ABCDEFGH$ na ravninu okomitu na prostornu dijagonalu $\overline{BH}$. Iz sukladnosti trokuta BHA, BHC i BHF i pošto je $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC = \sphericalangle FBC = \frac{\pi}{2}$, slike od $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BF}$, zatvaraju međusobno jednake kutove, tj. kutove veličine $\frac{2\pi}{3}$. Nadalje slike od $\overline{HG}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HD}$, moraju biti paralelne redom sa $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BF}$, tj. dvije po dvije moraju biti na istom pravcu, jer se točke B i H preslikavaju u istu točku. Zato su slike točaka A, C, F, G, E i D vrhovi pravilnog šesterokuta $A'E'F'G'C'D'$. Odredimo duljinu njegove stranice.

Promatrajmo trokut HBF u kojem je spuštena visina $\overline{FK}$. Zbog sličnosti trokuta HBF i HFK (imaju jednake kutove) vrijedi omjer $\frac{|KF|}{|HF|} = \frac{|FB|}{|HB|}$, odakle se dobiva $|KF| = \frac{|FB| \cdot |HF|}{|HB|} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = r$, gdje je a duljina brida kocke. Duljina $|KF|$ je ujedno duljina stranice pravilnog šesterokuta.

Odredimo duljinu stranice kvadrata $PQRS$ upisanog u ovaj šesterokut, kao na slici. Označimo s x i y duljine dužina $\overline{ST}$ i $\overline{TD'}$. Tada je



$$y = x\sqrt{3},$$
$$r + 2x = a_1,$$
$$r\sqrt{3} - 2y = a_1,$$

gdje je a_1 duljina stranice kvadrata $PQRS$.

Iz ovog sustava jednadžbi dobivamo $a_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

Napokon je, $a_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} > a$. Dakle, može se napraviti kvadratni otvor stranice a', tako da bude

$$a < a' < \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}},$$

kroz koji se može provući kocka brida a'.