Републички натпревар 2011

I година

1. Докажи дека

$$\frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=abc,$$

ако $a\neq b\neq c\neq a$ и $a+b+c=0$.

Решение. Бидејќи $a+b+c=0$, имаме $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$, и левата страна на равенството можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned}M&=\frac{a^3(-b)(-c)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(-c)(-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(-b)(-a)}{(c-a)(c-b)}\\&=abc\left(\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\right)\\&=abcL\end{aligned}$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}L&=\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\\&=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-c)(c-b)(b-a)}=\frac{N}{(a-c)(c-b)(b-a)}\end{aligned}$$

Но,

$$\begin{aligned}N&=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b=\\&=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b-c)(b+c)=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]=\\&=(b-c)(a-b)(a-c)=(a-c)(c-b)(b-a).\end{aligned}$$

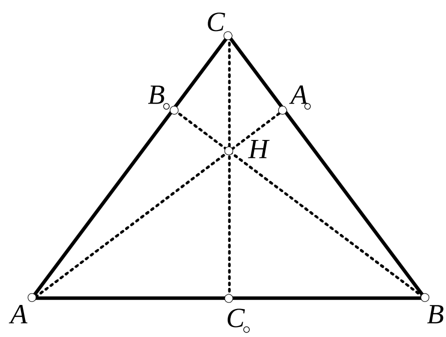
Сега

$$L=\frac{N}{(a-c)(c-b)(b-a)}=\frac{(a-c)(c-b)(b-a)}{(a-c)(c-b)(b-a)}=1,$$

од каде следува

$$M=abcL=abc\cdot 1=abc=R.$$

2. Во триаголникот ABC спуштени се висините AA_0, BB_0 и CC_0. Нека H е ортоцентарот. Ако $\overline{AH}:\overline{HA_0}=1:1$ и $\overline{BH}:\overline{HB_0}=2:1$, тогаш колку е односот $\overline{CH}:\overline{HC_0}$.



Решение. Да забележиме дека

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle BCH}}=\frac{\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AA_0}}{2}}{\frac{\overline{BC}\cdot\overline{HA_0}}{2}}=\frac{\overline{AA_0}}{\overline{HA_0}}=2,$$

односно $P_{\triangle BCH}=\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$. Аналогно

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ACH}}=\frac{\overline{BB_0}}{\overline{HB_0}}=3,$$

односно $P_{\triangle ACH}=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}$.

Да забележиме дека

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle BCH}+P_{\triangle ACH}+P_{\triangle ABH},$$

од што добиваме $P_{\triangle ABH}=\frac{1}{6}P_{\triangle ABC}$. Од ова имаме

$$6=\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABH}}=\frac{\overline{CC_0}}{\overline{HC_0}},$$

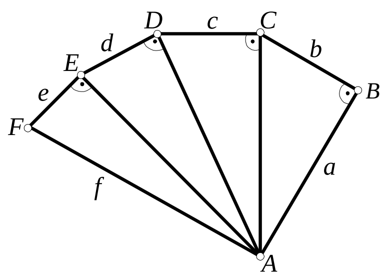
односно добиваме $\overline{CH}:\overline{HC_\circ}=5:1$.

3. Во шестаголникот $ABCDEF$ важи:

$$AB\perp BC,\ AC\perp CD,\ \ AD\perp DE,\ AE\perp EF.$$

Ако должините на страните на тој шестаголник се природни броеви, докажи дека не може сите да бидат непарни.

Решение. Да ги означиме должините на страните $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DE},\overline{EF},\overline{FA}$ со $a,b,c,d,$ e,f соодветно. Од правоаголните триаголници $ABC,\ ACD,\ ADE$ и AEF добиваме



$$a^2+b^2=\overline{AC}^2,\ \overline{AC}^2+c^2=\overline{AD}^2,$$

$$\overline{AD}^2+d^2=\overline{AE}^2,\ \overline{AE}^2+e^2=f^2,$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2 \qquad (1)$$

Да претпоставиме дека a,b,c,d,e,f се непарни природни броеви. Ако x е непарен број, т.е. $x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}$, тогаш

$$x^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1=4n(n-1)+1.$$

Броевите n и $n-1$ се последователни природни броеви, па $2|n(n-1)$, од каде добиваме дека $x^2=8k+1$ за некој природен број k. Според тоа, постојат природни броеви k,l,m,n,p,q, такви што

$$a^2=8k+1,\quad b^2=8l+1,\quad c^2=8m+1,\quad d^2=8n+1,\quad e^2=8p+1,\quad f^2=8q+1.$$

Ако замениме во (1) добиваме

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=8(k+l+m+n+p)+5\neq 8q+1=f^2.$$

Заради добиената контрадикција, таков шестаголник не постои, односно не постои таков шестаголник во кој должините на страните се непарни броеви.

Забелешка. Последниот дел може да се запише на слениот начин. Броевите n и $n-1$ се последователни природни броеви, па $2|n(n-1)$ и имаме $x^2\equiv 1(\bmod 8)$. Според тоа,

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \equiv 5(\bmod 8), \text{ а } f^2 \equiv 1(\bmod 8),$$

што е контрадикција со (1). Затоа, не може сите да се непарни.

4. Нека A е природен број со парен број на цифри, а B е бројот добиен со некоја промена на редоследот на цифрите на бројот A, при што $A+B=10^n$.

Докажи дека, ако n парен број, тогаш секој од броевите A и B со горното својство е делив со 10.

Решение. Нека $A=\overline{a_1a_2...a_n}$ и $B=\overline{b_1b_2...b_n}$. Од условот $A+B=10^n$, следува дека збирот на последните две цифри е 0 или 10.

Ако $a_n+b_n=10$, тогаш од условот $A+B=10^n$, би следувало дека $a_k+b_k=9$ за секое $k=1,2,...,n-1$. Со собирање на равенствата се добива дека

$$a_1+a_2+\ldots a_n+b_1+b_2+...+b_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)=9(n-1)+10.$$

Левата страна на равенството е парен број бидејќи цифрите на бројот A се исти со цифрите на бројот B. Десната страна на равенството е непарен број, бидејќи $9(n-1)$ е непарен број. На тој начин добивме противречност со претходното тврдење.

Следува $a_n+b_n=0$, односно $a_n=0$ и $b_n=0$, бидејќи a_n и b_n се цифри, што значи дека секој од броевите A и B е делив со 10.

II година

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3},$$

во множеството реални броеви.

Решение. Дефинициoната област на равенката е

$$D=\{x \mid x^2+x\geq 0, x\neq 0, x\geq -3\}=[-3,-1]\cup(0,+\infty).$$

Со кадрирање на равенката добиваме:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)(1+\tfrac{1}{x^2})}=x+3,$$

и оттука имаме

$$x^2-2+\tfrac{1}{x^2}+2\sqrt{(x+1)(x+\tfrac{1}{x})}=0,$$

односно

$$(x-\tfrac{1}{x})^2+2\sqrt{(x+1)(x+\tfrac{1}{x})}=0.$$

Последната равенка е еквивалентна со системот

$$\begin{cases} (x-\frac{1}{x})^2 = 0 \\ \sqrt{(x+1)(x+\frac{1}{x})} = 0. \end{cases}.$$

Имаме

$$\begin{cases} x-\frac{1}{x} = 0 \\ (x+1)(x+\frac{1}{x}) = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x-\frac{1}{x} = 0 \\ x = -1. \end{cases}$$

Бидејќи $x=-1\in D$ и ја задоволува $x-\frac{1}{x}=0$, $x=-1$ е решението на равенката.

2. Дадени се броевите a,b и c. Докажи дека барем една од равенките

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0$$
$$x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$
$$x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

има реални решенија.

Решение. Ќе ги разгледаме броевите $a_1=a-b$, $b_1=b-c$ и $c_1=c-a$. Притоа,

$$a_1+b_1+c_1=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0.$$

Од последното равенство, добиваме дека барем еден од трите собироци е непозитивен. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е бројот $b-c$. Значи $b-c\leq 0$, па за првата равенка имаме дискриминанта

$$D=(a-b)^2-4(b-c)\geq 0,$$

(како збир на ненегативни броеви). Првата равенка има решенија

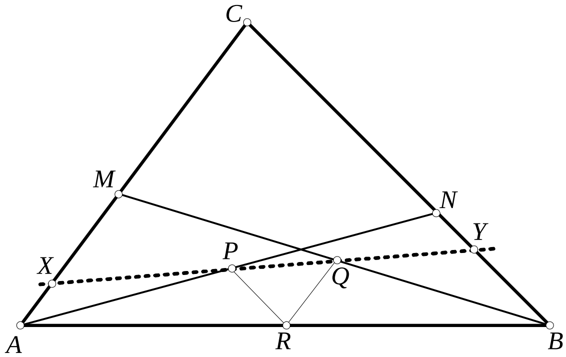
$$x_{1/2}=\frac{-(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2-4(b-c)}}{2}\in\mathbb{R}.$$

Аналогно се разгледуваат и другите случаи.

3. Точките M и N се на страните AC и BC на триаголникот ABC, соодветно и за нив важи $\overline{AM}=\overline{BN}$. Докажи дека правата која минува низ средините на отсечките AN и BM е нормална со симетралата на аголот ACB.

Решение. Да ги означиме со P и Q средините на отсечките AN и BM, соодветно, со R средината на страната AB и со X и Y пресеците на PQ со AC и BC, соодветно. Тогаш PR и QR се средни линии во триаголниците ABN и BMA, соодветно и затоа $\overline{PR}=\frac{\overline{BN}}{2}$ и $\overline{QR}=\frac{\overline{AM}}{2}$, а од условот $\overline{AM}=\overline{BN}$ следува

$\overline{PR} = \overline{QR}$, односно триаголникот PQR е рамнокрак. Од паралелноста на PR и BN добиваме $\measuredangle QPR = \measuredangle CYX$, а од паралелноста на QR и AM, $\measuredangle PQR = \measuredangle CXY$. Значи, триаголникот CXY е рамнокрак (со основа XY) па симетралата на аголот XCY, односно на аголот ACB, е нормална со правата која минува низ P и Q, што требаше да се докаже.



4. Решенијата на квадратната равенка $x^2 + bx + c = 0$ припаѓаат на интервалот $(2,3)$. Докажи дека важи $5b + 2c + 12 < 0$.

Решение. Може да забележиме дека од условот според кој решенијата $x_1, x_2 \in (2,3)$, точни се следниве неравенства:

1) $x_1 - 2 > 0, x_2 - 3 < 0$, од каде $(x_1 - 2)(x_2 - 3) < 0$... (1)

2) $x_2 - 2 > 0, x_1 - 3 < 0$, од каде $(x_2 - 2)(x_1 - 3) < 0$...(2).

Сега, користејќи ги Виетовите правила,

$$\begin{aligned} 5b + 2c + 12 &= -5(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 + 12 \\ &= (x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6) + (x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6), \\ &= (x_1 - 3)(x_2 - 2) + (x_1 - 2)(x_2 - 3) < 0 \end{aligned}$$

како директен збир на претходно добиените неравенства (1) и (2).

III година

1. Реши го системот

$$\begin{cases} 3^{2x-2y} + 2 \cdot 3^{x-y} - 3 = 0 \\ 3^x + 3^{1-y} = 4 \end{cases}.$$

Решение. Ќе воведеме смена $3^x = u, 3^{-y} = v$, каде $u, v > 0$. Системот добива облик

$$\begin{cases} u^2v^2 + 2uv - 3 = 0 \\ u + 3v = 4 \end{cases},$$

односно

$$\begin{cases} (uv)^2 + 2uv - 3 = 0 \\ u + 3v = 4 \end{cases}.$$

Првата равенка ја решаваме како квадратна по uv, од каде се добиваат две решенија $uv=1$ и $uv=-3$. Заради $u,v>0$, понатаму го разгледуваме само решението $uv=1$. За да се добијат вредностите за x,y, потребно е да го решиме системот

$$\begin{cases} uv=1 \\ u+3v=4 \end{cases}.$$

Решенијата на системот се решенија на квадратната равенка $v(4-3v)-1=0$, односно $v_1=1$ и $v_2=\frac{1}{3}$. Тогаш соодветните вредности за u се $u_1=1$ и $u_2=3$.

На крај, со решавање на системите

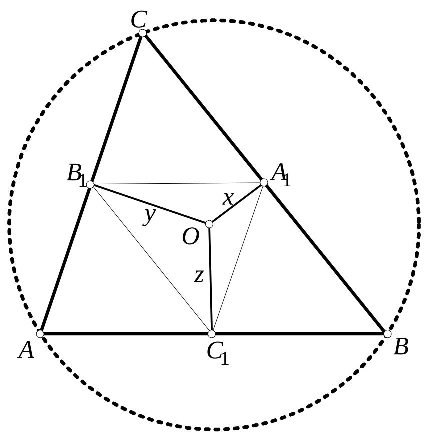
$$\begin{cases} 3^x=1 \\ 3^{-y}=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3^x=3 \\ 3^{-y}=\frac{1}{3} \end{cases},$$

се добиваат решенијата на почетниот систем $(x,y)\in\{(0,0),(1,1)\}$.

2. Должините на страните на остроаголниот триаголник ABC се a, b и c, а растојанијата од центарот на опишаната кружница до страните a, b и c се x, y и z, соодветно. Докажи дека

$$ayz+bzx+cxy=\frac{abc}{4}.$$

Решение. Нека C_1, A_1 и B_1 се средините на страните AB, BC и CA, соодветно, O е центарот на опишаната кружница и α,β и γ се аглите во триаголникот ABC. Триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични, со коефициент на сличност 2 и затоа $P_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{P_{\triangle ABC}}{4}=\frac{abc}{16R}$, каде R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Бидејќи x, y и z се растојанијата од центарот на опишаната кружница до страните a, b и c, имаме $\overline{OA_1}=x$, $\overline{OB_1}=y$ и $\overline{OC_1}=z$. Од тетивноста на четириаголниците CB_1OA_1, AC_1OB_1 и BA_1OC_1 следува дека



$$\measuredangle B_1OA_1=180^\circ-\gamma,\ \measuredangle C_1OB_1=180^\circ-\alpha \text{ и } \measuredangle A_1OC_1=180^\circ-\beta.$$

Тогаш:

$$P_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{xy\sin(180^\circ-\gamma)}{2}+\frac{yz\sin(180^\circ-\alpha)}{2}+\frac{zx\sin(180^\circ-\beta)}{2}=\frac{xy\sin\gamma}{2}+\frac{yz\sin\alpha}{2}+\frac{zx\sin\beta}{2}$$

Од синусната теорема имаме: $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$, $\sin\beta=\frac{b}{2R}$ и $\sin\gamma=\frac{c}{2R}$. Заменувајќи ги во горното равенство добиваме $P_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{xyc}{4R}+\frac{yza}{4R}+\frac{zxb}{4R}$. Тогаш

$$\frac{abc}{16R}=\frac{xyc}{4R}+\frac{yza}{4R}+\frac{zxb}{4R}$$

и оттука се добива бараното равенство.

3. Реши ја равенката $[\frac{25x-2}{4}]=\frac{13x+4}{3}$ ($[a]=z$ ако $z\in\mathbb{Z}$ и $z\le a<z+1$).

Решение. Нека $\frac{13x+4}{3}=y$. Оттука $x=\frac{3y-4}{13}$. Ако замениме во равенката, добиваме дека $[\frac{75y-126}{52}]=y$. Следува $y\le\frac{75y-126}{52}<y+1$, од каде $126\le 23y\le 178$ или $\frac{126}{23}\le y<\frac{178}{23}$. Бидејќи y е цел број следува дека $y_1=6$ или $y_2=7$. Оттука $x_1=\frac{14}{13}$ и $x_2=\frac{17}{13}$ се решенијата на дадената равенка.

4. Ако $\operatorname{tg}^5 x-\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x=2$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, докажи дека $3<\operatorname{tg}^6 x<4$.

Решение. На почеток ќе воведеме смена $\operatorname{tg} x=y$. Тогаш е доволно да покажеме дека, ако $y^5-y^3+y=2,$ за y реален број, важи $3<y^6<4$.
Од $y^5-y^3+y=y(y^4-y^2+1)=y((y^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})=2$ и од $(y^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$, јасно е дека $y>0$. Исто така важи и $y\ne 1$.

Ќе го трансформираме изразот y^6+1 во облик

$$y^6+1=(y^2+1)(y^4-y^2+1)=y(y+\frac{1}{y})(y^4-y^2+1)=(y+\frac{1}{y})(y^5-y^3+y)=2(y+\frac{1}{y})$$

Од $y>0$, користејќи неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме $y+\frac{1}{y}\ge 2$, а од тоа што $y\ne 1$, ќе важи строго неравенство $y+\frac{1}{y}>2$. Сега, конечно $y^6+1=2(y+\frac{1}{y})>4$, од каде $y^6>3$. Од друга страна, трансформирајќи го условот $y^5-y^3+y=2,$ во $y^5+y=y^3+2$, делејќи со $y^3\ne 0$, добиваме $y^2+\frac{1}{y^2}=1+\frac{2}{y^3}$. Сега $y^2+\frac{1}{y^2}>2$ (неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина, при $y\ne 1$), а од тука $1+\frac{2}{y^3}=y^2+\frac{1}{y^2}>2$. Добиваме $y^3<2,$ односно $y^6<4$. Значи навистина $3<y^6<4$.

IV година

1. Низата (a_n) е зададена со $a_1=1, a_2=\sqrt{19}$ и $a_{n+1}+a_n+a_{n-1}=3n,\ n\ge 2$.

Пресметај a_{2011}.

Решение. Со принципот на математичка индукција се покажува дека за $k \geq 1$ важи

$$a_{3k} = 3(k+1) - (a_1 + a_2);$$
$$a_{3k+1} = 3k + a_1;$$
$$a_{3k+2} = 3k + a_2.$$

Бидејќи $2011 = 3 \cdot 670 + 1$, следува дека

$$a_{2011} = a_{3 \cdot 670+1} = 3 \cdot 670 + a_1 = 3 \cdot 670 + 1 = 2011.$$

2. Да се докаже дека за секој триаголник важи неравенството

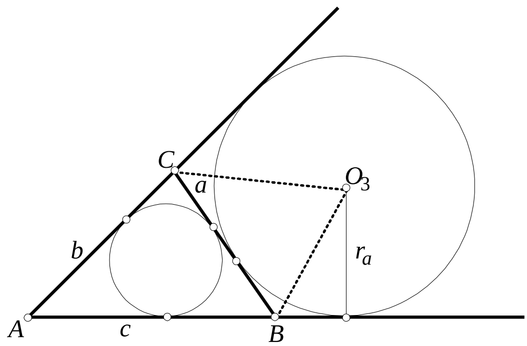
$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 4P,$$

каде r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот, а r_a, r_b, r_c се радиусите на припишаните кружници на триаголникот.

Решение. Нека $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ и $s = \frac{a+b+c}{2}$. Тогаш

$$P = P_{\triangle AO_3B} + P_{\triangle AO_3C} - P_{\triangle BO_3C}$$
$$= \frac{1}{2} c r_a + \frac{1}{2} b r_a - \frac{1}{2} a r_a = (s-a) r_a$$

па, $r_a = \frac{P}{s-a}$. Сосема аналогно се добива дека $r_b = \frac{P}{s-b}$ и $r_c = \frac{P}{s-c}$. Од неравенството меѓу квадратна и геометриска средина имаме дека



$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 4\sqrt{r r_a r_b r_c} = \frac{4P^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = 4P.$$

3. Множеството A ги задоволува следните услови:

(а) $A \subseteq \{1, 2, 3, ..., 100\}$;

(б) $|A| = 50$;

(в) Ако a_i и a_j се елементи во A тогаш $a_i + a_j \neq 100$.

Докажи дека A содржи елемент што е полн квадрат.

Решение. Ако $100 \in A$ тогаш A содржи полн квадрат: $100 = 10^2$. Нека $100 \notin A$. Тогаш $A \subseteq \{1, 2, 3, ..., 99\}$. Да ги разгледаме двоелементните множества $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, $\{3, 97\}$, ... , $\{49, 51\}$, заедно со едноелементното множество $\{50\}$. Сите тие се попарно дисјунктни, вкупно се 50 и нивната унија е $\{1, 2, 3, ..., 99\}$. Од дадените услови следува дека A содржи точно по еден елемент од секое од овие множества. Бидејќи меѓу дадените множества се наоѓа и $\{36,64\}$, следува дека и во овој случај A содржи полн квадрат: $36=6^2, 64=8^2$.

4. Да се најдат сите полиноми полином со реални коефициенти, така да за секој реален број x да важи

$$(1+2x)P(2x)=(1+2^{1000}x)P(x).$$

Решение. Нека $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Од условот на задачата, за најстариот коефициент имаме

$$2\cdot 2^n a_0=2^{1000}a_0.$$

Па степенот на полиномот е $n=999$. Јасно е дека $x=-\frac{1}{2}$ е нула на полиномот. Тогаш, за $x=-\frac{1}{2^2}$ имаме

$$(1-2\tfrac{1}{2^2})P(-\tfrac{1}{2})=(1+2^{1000}(-\tfrac{1}{2^2}))P(-\tfrac{1}{2^2}),$$

односно

$$(1-2^{998})P(-\tfrac{1}{2^2})=0,$$

од каде следува дека $x=-\frac{1}{2^2}$ е нула на полиномот $P(x)$. Продолжувајќи понатаму, се добива дека $x=-\frac{1}{2^k}$, $1\le k\le 999$ се нулите на полиномот $P(x)$. Па, бараниот полином е

$$P(x)=a_0(x+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2^2})\cdot\ldots\cdot(x+\tfrac{1}{2^{999}}),$$

$a_0\in\mathbb{R}$ е бараниот полином.