Осам решења једног задатка о правилном седмоуглу

***Драгољуб Милошевић*, Горњи Милановац**

Реч је о следећем задатку: *Доказати да у правилном седмоуглу $ABCDEFG$ важи једнакост*

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

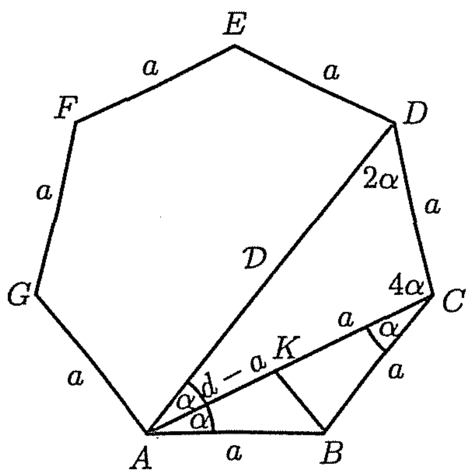
Решење 1. Ако са a, d и $\mathcal{D}$ означимо редом дужине странице, мање дијагонале и веће дијагонале правилног седмоугла, наведена једнакост постаје

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\mathcal{D}},$$

што је еквивалентно са

$$(*)\qquad \mathcal{D}d=a(\mathcal{D}+d).$$

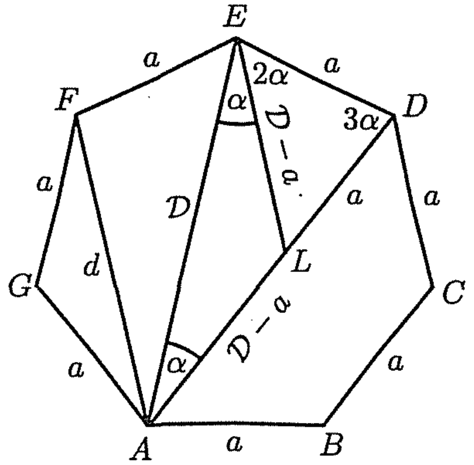
Нека је 2α величина централног угла над страницом датог седмоугла. Тада је $2\alpha=\frac{2\pi}{7}$, тј. $\alpha=\frac{\pi}{7}$. Одговарајући периферијски угао једнак је α. С обзиром да је спољашњи угао једнак централном углу, тј. 2α, то је унутрашњи угао правилног седмоугла $7\alpha-2\alpha=5\alpha$. Тада је $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCD-\sphericalangle ACB=5\alpha-\alpha=4\alpha$ (слика 1).



Слика 1.

Због $\sphericalangle CAD=\alpha$ и $\sphericalangle ACD=4\alpha$, у троуглу ACD је $\sphericalangle CDA=7\alpha-(\alpha+4\alpha)=2\alpha$. Значи, углови наспрам страница a, d и $\mathcal{D}$ троугла су редом: α, 2α, 4α. На дијагонали AC одредимо тачку K тако да је $CK=BC=a$, што значи да је $AK=d-a$. Углови једнакокраког троугла BCK су $\sphericalangle BCK=\alpha$ и $\sphericalangle CBK=\sphericalangle CKB=3\alpha$, па је $\sphericalangle AKB=4\alpha$. Због $\sphericalangle BAK=\alpha$ и $\sphericalangle AKB=4\alpha$ је $\sphericalangle ABK=2\alpha$. Троуглови ABK и ACD имају једнаке углове, па су слични. Из те сличности произлази $AB:AD=AK:AC$, или $a:\mathcal{D}=(d-a):d$, одакле је $\mathcal{D}d=a(\mathcal{D}+d)$, тј. $(*)$.

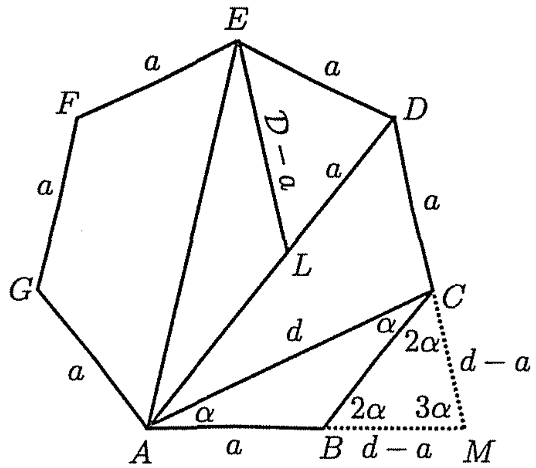
Решење 2. На већој дијагонали AD одредимо тачку L тако да је $DL = DE = a$ (видети слику 2).



Слика 2.

Тада је $AL = \mathcal{D} - a$. Како је троугао DEL једнакокраки и $\sphericalangle LDE = 5\alpha - 2\alpha = 3\alpha$, следи да је $\sphericalangle DEL = \sphericalangle DLE = 2\alpha$. Троугао ADE је, такође, једнакокраки ($AD = AE = \mathcal{D}$), па је $\sphericalangle AED = \sphericalangle LDE = 3\alpha$ и $\sphericalangle LEA = \sphericalangle AED - \sphericalangle DEL = \alpha$. То, пак, значи да је и $\triangle ALE$ једнакокраки, тј. $EL = LA = \mathcal{D} - a$. Троуглови ALE и AFG су слични, па је $AE : AF = AL : AG$, односно $\mathcal{D} : d = (\mathcal{D} - a) : a$. Одавде произлази једнакост $(*)$.

Решење 3. Продужимо страницу AB до тачке M тако да $AM = AC = d$ (слика 3).



Слика 3.

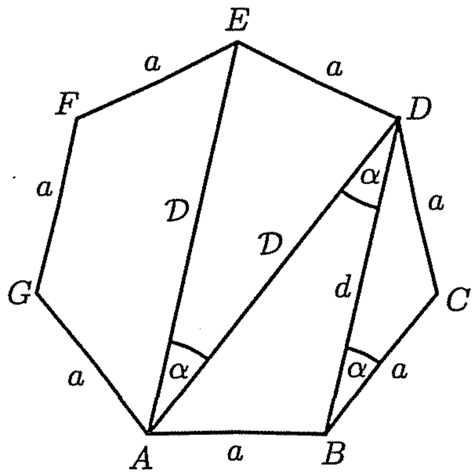
Тада је $BM = d - a$. Троугао AMC је једнакокраки, па је $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACM = (7\alpha - \alpha) : 2 = 3\alpha$. Због $\sphericalangle ACB = \alpha$, $\sphericalangle ACM = 3\alpha$ и $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACM - \sphericalangle ACB$, имамо $\sphericalangle BCM = 2\alpha$. Како је и $\sphericalangle CBM = 2\alpha$, закључујемо да троуглови BCM и DEL имају једнаке углове, па је $\triangle BCM \sim \triangle DEL$. Тада је $BC : EL = BM : DL$, или $a : (\mathcal{D} - a) = (d - a) : a$. Отуда је $\mathcal{D}d = a\mathcal{D} + ad$, тј. $(*)$.

Решење 4. На основу косинусне теореме примењене на троугао BCD (слика 4), имамо

$$a^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha,$$

тј.

$$\cos\alpha = \frac{d}{2a}. \tag{1}$$



Слика 4.

Применом исте теореме на троуглове ABD и ADE добијамо

$$a^2 = \mathcal{D}^2 + d^2 - 2\mathcal{D}d\cos\alpha \tag{2}$$

и

$$a^2 = \mathcal{D}^2 + \mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D}^2\cos\alpha. \tag{3}$$

Имајући у виду једнакост (1), из једнакости (2) и (3) следи да је

$$a^3 = a\mathcal{D}^2 + ad^2 - d^2\mathcal{D} \tag{4}$$

и

$$a^3 = 2a\mathcal{D}^2 - d\mathcal{D}^2. \tag{5}$$

Из (4) и (5) произлази да је $a\mathcal{D}^2 + ad^2 - d^2\mathcal{D} = 2a\mathcal{D}^2 - d\mathcal{D}^2$, или $\mathcal{D}d(\mathcal{D} - d) = a(\mathcal{D}^2 - d^2)$. Из последње једнакости, због $\mathcal{D}^2 - d^2 = (\mathcal{D} - d)(\mathcal{D} + d)$ и $\mathcal{D} - d \neq 0$, следи тражена једнакост $(*)$.

Решење 5.

Лема (помоћна теорема). Нека су a, b и c странице троугла ABC, и α, β, γ редом наспрамни углови. Ако је $\alpha = 2\beta$, онда је $a^2 = b(b+c)$.

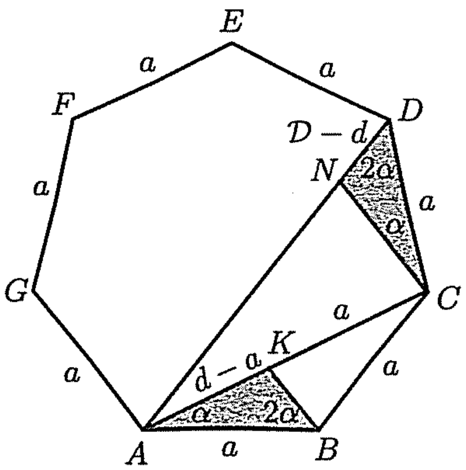
Доказ леме препуштамо читаоцу (видети [3], стране 65 и 113). Ако наведену лему применимо два пута на троугао ACD (слика 1) имамо да је $\mathcal{D}^2 = d(d+a)$ и $d^2 = a(a+\mathcal{D})$, тј.

$$\mathcal{D}^2 - d^2 = ad \quad \text{и} \quad d^2 - a^2 = a\mathcal{D}.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо

$$\mathcal{D}^2 - a^2 = a(\mathcal{D} + d). \tag{6}$$

На дијагонали AD одредимо тачку N тако да је $AN = d$. Тада је $DN = \mathcal{D} - d$ (слика 5).



Слика 5.

Одредимо и тачку K као у решењу 1. Троуглови ABK и CDN су подударни (правило СУС), па је $CN = AK = d - a$. Применом наведене леме на $\triangle CDN$ имамо $(d-a)^2 = (\mathcal{D} - d)(\mathcal{D} - d + a)$, тј.

$$\mathcal{D} - a^2 = 2\mathcal{D}d - a(\mathcal{D} + d). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следи

$$a(\mathcal{D} + d) = 2\mathcal{D}d - a(\mathcal{D} + d),$$

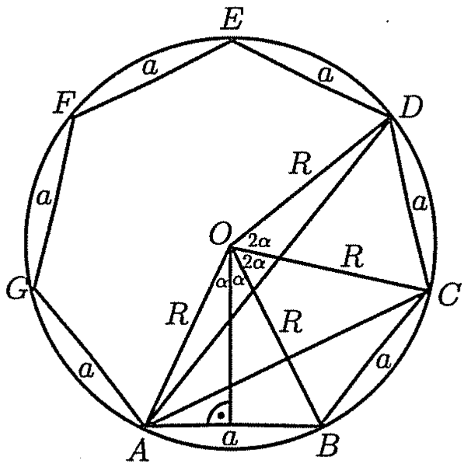
тј. $\mathcal{D}d = a(\mathcal{D} + d)$.

Решење 6. С обзиром да је $a = 2R\sin\alpha$, $d = 2R\sin\alpha$ и $\mathcal{D} = 2r\sin 3\alpha$ (слика 6), једнакост $(*)$ еквивалентна је са

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha},$$

тј. са

$$\sin 2\alpha \sin 3\alpha = \sin\alpha(\sin 2\alpha + \sin 3\alpha). \tag{8}$$



Слика 6.

Како је $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ и $\cos\alpha\sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)$, једнакост (8) се претвара у $\sin 4\alpha - \sin 3\alpha = 0$, односно у

(9) $$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2} = 0.$$

Како је $\frac{7\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, једнакост (9) је тачна, а самим тим је тачна једнакост (6), односно једнакост $(*)$.

Решење 7.

Молвајдова формула. Ако су a, b и c странице троугла ABC, а α, β, γ редом наспрамни углови, онда је

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}.$$

Применом Молвајдове формуле на троугао ACF, имамо

(10) $$\frac{\mathcal{D}+d}{d} = \frac{\cos\dfrac{3\alpha-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{2\alpha}{2}} = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.$$

Применом синусне теореме на $\triangle AMC$ (слика 3) добијамо

$$\frac{d-a}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin 3\alpha},$$

тј.

(11) $$\frac{d-a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

С обзиром да је $\sin 3\alpha = \sin\left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$, за $\alpha = \frac{\pi}{7}$, тада је

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = 1,$$

па из једнакости (10) и (11) следи

$$\frac{\mathcal{D}+d}{d}\cdot\frac{d-a}{d} = 1,$$

што је еквивалентно са $(*)$.

Решење 8.

Птоломејева теорема. Производ дијагонала тетивног четвороугла једнак је збиру производа наспрамних страница. Другим речима, ако је $ABCD$ тетивни четвороугао, онда је

$$AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA.$$

Применом Птоломејеве теореме на тетивни четвороугао $ACDE$ (слика 3), имамо

$$AD\cdot CE = AE\cdot CD + AC\cdot DE,$$

односно $\mathcal{D}\cdot d = \mathcal{D}\cdot a + d\cdot a$, одакле следи $(*)$.

Задаци

1. Докажите једнакост $(*)$ применом методе координата.
2. У правилном многоуглу $A_1A_2\ldots A_n$ важи једнакост

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

Одредите n ([2], страна 90).

Литература

[1] Ш. Арсланагић, Д. Милошевић, *Конверзија Птоломејеве теореме*, Тангента 3 (1995/96), 3-5.

[2] Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић, Л. Милин, *Тригонометрија*, уџбеник са збирком задатака за II разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1999.

[3] С. Огњановић и др., *Збирка задатака из математике*, Стручна књига, Београд, 1984.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2011/12 година