Самоил Малчески
Скопје

ЗБИРОВИ НА ПРВИТЕ n ПРИРОДНИ БРОЕВИ, НИВНИТЕ КВАДРАТИ И НИВНИТЕ КУБОВИ

Во оваа статија ќе се осврнеме на определувањето на збирот на првите n природни броеви, на збирот на нивните квадрати и на збирот на нивните кубови. Притоа во првите две задачи ќе ја користиме идејата од познатата анегдота за големиот германски математичат Карл Фридрих Гаус (1777-1855), која ја покажува неговата остроумност со која уште како дете го изненадил својот учител. Имено, еден ден учителот сакал учениците подолго време да ги ангажира со некоја потешка задача, се со цел тој да може друго да работи. Затоа тој им задал задача да ги соберат сите природни броеви од 1 до 100. Меѓутоа, само што учителот седнал и почнал нешто да пишува, се јавил малиот Карл и на учителот му соопштил дека тој ја решил задачата.

- Како? – се зачудил учителот.

- Многу лесно. Ги групирав броевите од 1 до 100 во 50 парови: првиот пар 1 и 100, вториот 2 и 99, третиот 3 и 98 итн. до педесеттиот пар формиран од броевите 50 и 51. Збирот на броевите во секој пар е еднаков на 101. Затоа збирот на сите броеви од 1 до 100 е еднаков на $101\cdot 50=5050$.

Толку за Гаус и неговата остромумност, а сега да се вратиме на нашите разгледувања.

Задача 1. Определи го збирот $S_1(n)$ на првите n природни броеви.

Решение. *Прв начин*. Броевите од 1 до n ќе ги запишеме два пати во две редици на следниов начин:

$$\begin{array}{lllllll} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Забележуваме дека збирот на броевите запишани во секоја колона е $n+1$ и како имаме n колони, добиваме

$$\begin{aligned} &2(1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n)= \\ &\qquad =(1+n)+(2+(n-1))+\dots+((n-1)+2)+(n+1) \\ &\qquad =n(n+1) \end{aligned}$$

од каде за збирот $S_1(n)$ на првите степени на природните броеви добиваме:

$$S_1(n)=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Горната постапка можеме да ја илустрираме со следната табела составена од $n+1$ колона и n редици:

	1	2	3	...	...	...	n-1	n	n+1
n	■	■	■				■	■	□
n-1	■	■				■	■	□	□
	■				■	■	□	□	
				■	■	□	□		
			■	■	□	□			
3		■	■	□	□				□
2	■	■	□	□				□	□
1	■	□	□				□	□	□

Втор начин. Ако во формулата $(k+1)^2=k^2+2k+1$ последователно ставиме $k=0,1,2,...,n$ добиваме

$$1^2=(0+1)^2=0^2+2\cdot 0+1$$
$$2^2=(1+1)^2=1^2+2\cdot 1+1$$
$$3^2=(2+1)^2=2^2+2\cdot 2+1$$
$$4^2=(3+1)^2=3^2+2\cdot 3+1$$
....
$$n^2=((n-1)+1)^2=(n-1)^2+2(n-1)+1$$
$$(n+1)^2=n^2+2n+1.$$

Сега, ако ги собереме последните равенства добиваме

$$1^2+2^2+...+(n+1)^2=1^2+2^2+...+n^2+2(1+2+...+n)+(n+1),$$

од каде наоѓаме

$$(n+1)^2=2S_1(n)+(n+1),$$

па затоа

$$S_1(n)=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.\ \blacksquare$$

Идејата од првиот начин на наоѓање на збирот на првите степени на првите n природни броеви можеме да ја искористиме и за определување на збирот на првите n непарни природни броеви: $1,3,5,...,2n-1$.

Задача 2. Определи го збирот на првите n непарни природни броеви: $1,3,5,...,2n-1$.

Решение. Броевите $1,3,5,...,2n-1$ ќе ги запишеме два пати во две редици на следниов начин:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 5 & ... & 2n-5 & 2n-3 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & ... & 5 & 3 & 1 \end{array}$$

Забележуваме дека збирот на броевите запишани во секоја колона е $2n$ и како имаме n колони, добиваме

$$2(1+3+5+...+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1))=n\cdot 2n=2n^2,$$

т.е.

$$1+3+5+...+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)=\tfrac{2n^2}{2}=n^2. \blacksquare$$

Како за определувањето на збирот на првите n природни броеви, така и за определувањето на збировите на нивните квадрати и кубови, може да се употребат соодветни табели. Ваквиот пристап е искористен во статијата која е наведена на крајот од нашите разгледувања. Меѓутоа, постојат и други методи за наоѓање на овие збирови, а ние ќе се задржиме на идејата употребена во вториот начин на решавање на задача 1.

Задача 3. Определи го збирот $S_2(n)$ на квадратите на првите n природни броеви.

Решение. Ако во формулата

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$$

последователно ставиме $k=0,1,2,...,n$ добиваме

$$1^3=(0+1)^3=0^3+3\cdot 0^2+3\cdot 0+1$$

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$$

$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$$

$$4^3=(3+1)^3=3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$$

....

$$n^3=(n-1+1)^3=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1$$

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1.$$

Сега, ако ги собереме последните равенства добиваме

$$1^3+2^3+...+(n+1)^3=1^3+2^3+...+n^3+3(1^2+2^2+...+n^2)+$$
$$+3(1+2+...+n)+(n+1),$$

од каде наоѓаме

$$(n+1)^3=3S_2(n)+3S_1(n)+(n+1),$$

па затоа

$$3S_2(n)=(n+1)^3-3S_1(n)-(n+1),$$

т.е.

$$\begin{aligned}S_2(n)&=\tfrac{1}{3}((n+1)^3-3\tfrac{n(n+1)}{2}-(n+1))\\&=\tfrac{n+1}{6}(2(n+1)^2-3n-2)\\&=\tfrac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6}\\&=\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\end{aligned}$$

што и требаше да се определи. ■

Задача 4. Определи го збирот $S_3(n)$ на кубовите на првите n природни броеви.

Решение. Ако во формулата

$$(k+1)^4=k^4+4k^4+6k^2+4k+1$$

последователно ставиме $k=0,1,2,...,n$ добиваме

$$1^4=(0+1)^4=0^4+4\cdot 0^3+6\cdot 0^2+4\cdot 0+1$$
$$2^4=(1+1)^4=1^4+4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1$$
$$3^4=(2+1)^4=2^4+4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1$$
$$4^4=(3+1)^4=3^4+4\cdot 3^3+6\cdot 3^2+4\cdot 3+1$$
....
$$n^4=((n-1)+1)^4=(n-1)^4+4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1$$
$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

Сега, ако ги собереме последните равенства добиваме

$$1^4+2^4+...+(n+1)^4=1^4+2^4+...+n^4+4(1^3+2^3+...+n^3)+$$
$$+6(1^2+2^2+...+n^2)+4(1+2+...+n)+(n+1),$$

од каде наоѓаме

$$(n+1)^4=4S_3(n)+6S_2(n)+4S_1(n)+(n+1),$$

па затоа

$$4S_3(n)=(n+1)^4-6S_2(n)-4S_1(n)-(n+1),$$

т.е.

$$\begin{aligned}4S_3(n)&=(n+1)^4-6\cdot\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}-(n+1)\\&=(n+1)((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1)\\&=(n+1)(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1)\\&=(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2,\end{aligned}$$

односно

$$S_3(n)=[\tfrac{n(n+1)}{2}]^2. \blacksquare$$

Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека $S_2(n)-S_1(n)=\frac{n(n^2-1)}{3}$.
2. Дали може за некој природен број n збирот на кубовите на првите n природни броеви да биде еднаков на 20000?
3. Определи го збирот на првите n парни природни броеви.
4. Определи го збирот квадратите на првите n парни природни броеви.
5. Определи го збирот на квадратите на првите n непарни природни броеви.
6. Определи го збирот на кубовите на првите n парни природни броеви.
7. Определи го збирот на кубовите на првите n непарни природни броеви.

Литература

1. Јудита Цофман – Користење на табели броеви за одредување на збировите на елементите на некои низи природни броеви, Математички талент