КЛАСЕ СРЕДИНА И ГЕОМЕТРИЈСКА ИЛУСТРАЦИЈА СРЕДИНА ДВА БРОЈА (II ДЕО)

Борислав Мићић, Бањалука

У претходном делу посматрали смо геометријско представљање основних средина два броја, као специјалне случајеве шире класе $C_2^{[\alpha]}$ средина, које су за позитивне реалне бројеве a_1 и a_2 дефинисане формулом

$$C_2^{[\alpha]}(a_1, a_2) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

где је $\alpha \neq 0$ било који реалан број.

Сада посматрајмо једну другу класу средина $D_2^{[\alpha]}$, која је за позитивне реалне бројеве a_1 и a_2 задана формулом

$$D_2^{[\alpha]}(a_1, a_2) = \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1}},$$

где је α било који реалан број. Ова дефиниција вреди такође за било коју n-торку позитивних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$, али ми ћемо се овде ограничити само на два броја.

Да бисмо $D_2^{[\alpha]}(a_1, a_2)$ могли звати средином бројева a_1, a_2, потребно је показати да $D_2^{[\alpha]}(a)$ лежи између тих бројева. У ту сврху можемо претпоставити, без смањења општости, да је $0 \leq a_1 \leq a_2$. Тада је $\min(a_1, a_2) = a_1$, $\max(a_1, a_2) = a_2$ и, очигледно, вреди

$$a_1 a_1^{\alpha-1} + a_1 a_2^{\alpha-1} \leq a_1^\alpha + a_2^\alpha \leq a_2 a_1^{\alpha-1} + a_2 a_2^{\alpha-1}.$$

Одатле је

$$a_1 \leq \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{a_1^{1\alpha-1} + a_2^{\alpha-1}} \leq a_2,$$

што је и требало доказати.

Каква је веза између класа средина $C^{[\alpha]}$ и $D^{[\alpha]}$?

Будући да је $a^0 = 1$ за било које $a \neq 0$, примећујемо да је

$$D_2^{[0]}(a_1, a_2) = \frac{2}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}} \quad \text{и} \quad D_2^{[1]}(a) = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

то јест

$$D_2^{[0]}(a_1,a_2) = C_2^{[-1]}(a_1,a_2) = H_2(a_1,a_2) \quad \text{и} \quad d_2^{[1]}(a_1,a_2) = C_2^{[1]}(a_1,a_2) = A_2(a_1,a_2).$$

С овим се не завршава веза између класа средина $D^{[\alpha]}$ и $C^{[\alpha]}$.

Тако исто као и $C^{[\alpha]}$, класа средина $D^{[\alpha]}$ има својство монотоности по α, тј. вреди следећа тврдња.

СВОЈСТВО 2. *Ако је $\alpha < \beta$, тада је $D^{[\alpha]}(a_1,a_2) \le D^{[\beta]}(a_1,a_2)$, при чему знак једнакости се достиже ако и само ако је $a_1 = a_2$.*

Доказ. Пошто је $\beta - \alpha > 0$, то за $a_1 \ne a_2$ разлика $a_1 - a_2$ и $a_2^{\beta-\alpha} - a_1^{\beta-\alpha}$ имају различите знаке, па је

$$(a_1a_2)^{\alpha-1}(a_1-a_2)(a_2^{\beta-\alpha} - a_1^{\beta-\alpha}) \le 0,$$

тј.

$$a_1^{\alpha}a_2^{\beta-1} + a_2^{\alpha}a^{\beta-1}{}_1 \le a_1^{\beta}a_2^{\alpha-1} + a^{\beta}{}_2a_1^{\alpha-1}.$$

Према томе,

$$a_1^{\alpha}a_1^{\beta-1} + a_1^{\alpha}a_2^{\beta-1} + a_2^{\alpha}a_1^{\beta-1} + a_2^{\alpha}a_2^{\beta-1} \le a_1^{\beta}a_1^{\alpha-1} + a_1^{\beta}a_2^{\alpha-1} + a_2^{\beta}a_1^{\alpha-1} + a_2^{\beta}a_2^{\alpha-1}$$

или

$$(a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha})(a_1^{\beta-1} + a_2^{\beta-1}) \le (a_1^{\beta} + a_2^{\beta})(a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1}).$$

Одатле следи

$$\frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha}}{a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1}} \le \frac{a_1^{\beta} + a_2^{\beta}}{a_1^{\beta-1} + a_2^{\beta-1}},$$

тј. $D^{[\alpha]}(a_1,a_2) \le D^{[\beta]}(a_1,a_2)$, при чему се знак једнакости достиже само при $a_1 = a_2$.

Вреди такође и следеће својство.

СВОЈСТВО 3. *Ако је $\alpha \le 0$, тада је $D^{[\alpha]}(a_1,a_2) \le C^{[\alpha-1]}(a_1,a_2)$, ако је $0 < \alpha < 1$, тада је $C^{[\alpha-1]}(a_1,a_2) \le D^{[\alpha]}(a_1,a_2) \le C^{[\alpha]}(a_1,a_2)$; ако је $\alpha \ge 1$ тада је $C^{[\alpha]}(a_1,a_2) \le D^{[\alpha]}(a_1,a_2)$.*

Знак једнакости се постиже у оним и само оним случајевима, када је или $\alpha = 0$, или $\alpha = 1$, или $a_1 = a_2$.

Доказ. Имамо

$$\frac{(C^{[\alpha]})^{\alpha}}{(C^{[\alpha-1]})^{\alpha-1}} = D^{[\alpha]}, \tag{*}$$

или

$$\left(\frac{C^{[\alpha]}}{C^{[\alpha-1]}}\right)^{\alpha-1} \cdot C^{[\alpha]} = D^{[\alpha]}. \tag{**}$$

Према својству 1. је $0 < C^{[\alpha-1]} \le C^{[\alpha]}$ или $\dfrac{(C^{[\alpha]})}{C^{[\alpha-1]})^{\alpha-1}} \ge 1$. Отуда закључујемо:

ако је $\alpha \le 0$, тада $\left(\dfrac{C^{[\alpha]}}{C^{[\alpha-1]}}\right)^{\alpha} \le 1$, одакле $\dfrac{(C^{[\alpha]})^{\alpha}}{(C^{[\alpha-1]})^{\alpha-1}} \le C^{[\alpha-1]}$, па према (*)

$D^{[\alpha]} \leq C^{[\alpha-1]}$;
ако је $\alpha > 0$, тада $\left(\frac{C^{[\alpha]}}{C^{[\alpha-1]}}\right)^{\alpha} \geq 1$, одакле $\frac{(C^{[\alpha]})^{\alpha}}{(C^{[\alpha-1]})^{\alpha-1}} \geq C^{[\alpha-1]}$, па према (*) $C^{[\alpha-1]} \leq D^{[\alpha]}$;
ако је $\alpha < 1$, тада $0 < \left(\frac{C^{[\alpha]}}{C^{[\alpha-1]}}\right)^{\alpha-1} \leq 1$, па према (**) $D^{[\alpha]} \leq C^{[\alpha]}$;
ако је $\alpha \geq 1$, тада $\left(\frac{C^{[\alpha]}}{C^{[\alpha-1]}}\right)^{\alpha-1} \geq 1$, па према (**) $C^{[\alpha]} \leq D^{[\alpha]}$.

Лако се види да знак једнакости у свим неједнакостима, које учествују у доказу, постиже се само у набројаним случајевима у услову тврдње.

Из овог својства следи да постоји реалан број λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, за који је $D^{[\lambda]} = C^{[0]}$. Тако, на пример, вреди следеће својство.

СВОЈСТВО 4. $D_2^{\left[\frac{1}{2}\right]}(a_1, a_2) = C_2^{[0]}(a_1, a_2)$.

Доказ. Заиста,

$$D_2^{\left[\frac{1}{2}\right]}(a_1, a_2) = \frac{a_1^{\frac{1}{2}} + a_2^{\frac{1}{2}}}{a_1^{\frac{1}{2}-1} + a_2^{\frac{1}{2}-1}} = \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}}} = \sqrt{a_1 \cdot a_2} = G(a_1, a_2) = C_2^{[0]}(a_1, a_2).$$

Специјално,

$$D^{[-1]}(a,b) = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}, \qquad C^{[-2]}(a,b) = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}},$$

$$C^{[-1]}(a,b) = D^{[0]}(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \quad D^{[\frac{1}{2}]}(a,b) = C^{[0]}(a,b) = \sqrt{ab},$$

$$D^{[1]}(a,b) = C^{[1]}(a,b) = \frac{a+b}{2}, \qquad C^{[2]}(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$D^{[2]}(a,b) = \frac{a^2+b^2}{a+b}, \qquad D^{[3]}(a,b) = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}.$$

Из својстава 1-4 следи, специјално, овакав ланац једнакости и неједнакости:

$$D^{[-1]}(a,b) \leq C^{[-2]}(a,b) \leq C^{[-1]}(a,b) = D^{[0]}(a,b) \leq D^{[\frac{1}{2}]}(a,b) = C^{[0]}(a,b) \leq$$

$$\leq D^{[1]}(a,b) = C^{[1]}(a,b) \leq C^{[2]}(a,b) \leq D^{[2]}(a,b) \leq D^{[3]}(a,b),$$

одакле заменом добијамо:

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} \le \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \tag{II}$$

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \frac{a^2+b^2}{a+b} \le \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}.$$

Наш циљ је даље да конструишемо геометријску илустрацију овог ланца неједнакости. Пре тога наведимо још једно интересантно својство.

СВОЈСТВО 5. *За било које* α *вреди:*

1) $D^{[\alpha+1]}(a,b) + D^{[1-\alpha]}(a,b) = a+b$, *2)* $D^{[\alpha+1]}(a,b) \cdot D^{[-\alpha]}(a,b) = a \cdot b$,

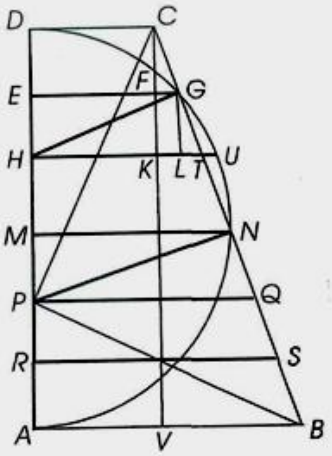
3) $C^{[\alpha]}(a,b) \cdot C^{[-\alpha]}(a,b) = a \cdot b$.

Доказ: 1)

$$\begin{aligned} D^{[\alpha+1]}(a,b) + D^{[1-\alpha]}(a,b) &= \frac{a^{\alpha+1}+b^{\alpha+1}}{a^\alpha+b^\alpha} + \frac{a^{1-\alpha}+b^{1-\alpha}}{a^{-\alpha}+b^{-\alpha}} = \\ &= \frac{a^{\alpha+1}+b^{\alpha+1}}{a^\alpha+b^\alpha} + \frac{ab^\alpha+a^\alpha b}{a^\alpha+b^\alpha} = \\ &= \frac{(a^\alpha+b^\alpha)(a+b)}{a^\alpha+b^\alpha} = a+b. \end{aligned}$$

Докази тврдњи под 2) и 3) су такође једноставни, па остављамо читаоцу за вежбу. Сада пређимо на разматрање геометријске интерпретације ланца неједнакости (II).

Пример 6. Посматрајмо правоугли трапез $ABCD$ ос основицама $AB = a, CD = b$ ($b < a$) и висином $AD = a+b$ (Слика 1). Нека је $AM = DM = \frac{a+b}{2}$. Конструишимо $\overline{MN} \perp \overline{AD}$; $MN = \frac{a+b}{2}$ (као средња дуж трапеза).



Слика 1.

Према томе, тачке A, N и D леже на једној кружници полупречника $\frac{a+b}{2}$, са центром у тачки M. Нека је G друга тачка пресека крака $\overline{BC}$ са кружницом. Нека је $DH = b$. Конструишимо редом: $\overline{HU} \perp \overline{AD}$, $\overline{EG} \parallel \overline{HU}$, $\overline{AR} \cong \overline{DE}$, $AP = DH = b$, $\overline{PQ} \perp \overline{AD}$, $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{PN}$ и $\overline{HG}$.

Докажимо сада следеће једнакости:

$$EG = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} = D^{[-1]}(a,b)\,, \quad HG = \frac{ab}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}} = C^{[-2]}(a,b)\,,$$

$$HT = \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = D^{[0]}(a,b)\,, \qquad HU = \sqrt{ab} = D^{[\frac{1}{2}]}(a,b)\,,$$

$$MN = \frac{a+b}{2} = D^{[1]}(a,b)\,, \qquad PN = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = C^{[2]}(a,b)$$

$$PQ = \frac{a^2+b^2}{a+b} = D^{[2]}(a,b)\,, \qquad RS = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = D^{[3]}(a,b)\,,$$

$$\angle PNQ = 90^\circ\,.$$

Доказ. За доказ повуцимо $\overline{GL} \parallel \overline{CV} \parallel \overline{AD}$. Једнакост $MN = \frac{a+b}{2} = D^{[1]}(a,b)$ је тачна, јер је $\overline{MN}$ средња дуж трапеза по конструкцији. Даље

$$BN = NC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{CV^2+BV^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,,$$

и $CD^2 = CN \cdot CG$, тј. $b^2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \cdot CG$, одакле је $CG = \dfrac{b^2}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}$.

Из сличности троуглова CFG и CVB налазимо:

$$\frac{FG}{BV} = \frac{CG}{CB}\,, \quad \frac{EG-EF}{BV} = \frac{CG}{CB}\,, \quad \text{тј.} \quad \frac{EG-b}{a-b} = \frac{\dfrac{b^2}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}}{2\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}\,,$$

одакле је

$$EG = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} = D^{[-1]}(a,b)\,.$$

Аналогно из сличности троуглова CTK и CVB следи:

$$\frac{TK}{BV} = \frac{CK}{CV}\,, \quad \frac{HT-HK}{BV} = \frac{CK}{CV}\,, \quad \text{тј.} \quad \frac{HT-b}{a-b} = \frac{b}{a+b}\,,$$

одакле је

$$HT = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = D^{[0]}(a,b)\,.$$

Даље, из сличности троуглова GLT и CVB, те једнакости $HL = EG$ следи:

$$\frac{GL}{CV} = \frac{LT}{BV}, \quad \frac{GL}{CV} = \frac{HT-HL}{BV}, \quad \text{тј.} \quad \frac{GL}{a+b} = \frac{\frac{2ab}{a+b} - \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}}{a-b},$$

одакле је

$$GL = \frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}\,.$$

Како је $GL = HE$, то је

$$HG = \sqrt{EG^2+HE^2} = \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} = C^{[2]}(a,b)\,.$$

Приметимо да из услова на почетку примера следи да је $MP = \frac{a-b}{2}$. Из правоуглог троугла MNP налазимо

$$PN = \sqrt{MN^2+MP^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = C^{[2]}(a,b)\,.$$

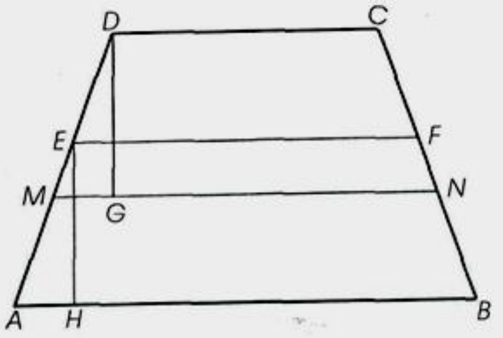
У примеру 1. је показано да $HU = \sqrt{DH \cdot HA}$ (јер је HU висина правоуглог троугла ADU). Како је по контрукцији $DH = b$, $AH = a$, то је

$$HU = \sqrt{ab} = D^{[\frac{1}{2}]}(a,b)\,.$$

За доказ једнакости $PQ = \dfrac{a^2+b^2}{a+b} = D^{[2]}(a,b)$ применићемо својство 5. 1) и следеће својство трапеза.

СВОЈСТВО 6. *Нека дужи $\overline{EF}$ и $\overline{MN}$ спајају краке трапеза $ABCD$ и паралелне су основицама $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (Слика 2.). Тада растојање међу дужима $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$ једнако је растојању међу дужима $\overline{MN}$ и $\overline{CD}$ ако и само ако је $EF + MN = AB + CD$.*

Доказ. Нека је $\overline{DG} \perp \overline{MN}$ и $\overline{EH} \perp \overline{AB}$. Тада је EH растојање међу дужима $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$, а DG је растојање међу дужима $\overline{MN}$ и $\overline{CD}$.



Слика 2.

Претпоставимо да је $EF + MN = AB + CD$. Отуда је $\dfrac{EF+MN}{2} = \dfrac{AB+CD}{2}$. То значи да се средња линија трапеза $MNFE$ подудара са средњом линијом трапеза $ABCD$. Отуда се лако закључује да је $EH = DG$.

Доказ обрнуте тврдње у својству 6. оставља се читаоцу.

Сада наставимо са доказом у примеру 6. Како је по претпоставци и конструкцији $AH = DP$, тј. растојање међу дужима AB и HT једнако растојању међу дужима CD и AQ, то опет према својству 6. вреди

$$PQ + HT = AB + CD, \quad \text{тј.} \quad PQ + \frac{2ab}{a+b} = a + b\,,$$

одакле је

$$PQ = \frac{a^2+b^2}{a+b} = D^{[2]}(a,b)\,.$$

Аналогно се доказује и последња једнакост. Наиме, како је по конструкцији $AR = DE$, то је и $AE = DR$, тј. растојање међу дужима $\overline{AB}$ и $\overline{EG}$ једнако растојању међу дужима $\overline{CD}$ и $\overline{RS}$, па према својству 6. је

$$RS + EG = AB + CD, \quad \text{тј.} \quad RS + \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} = a + b\,,$$

одакле је

$$RS = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = D^{[3]}(a,b)\,.$$

Докажимо још и последњу тврдњу о угловима. Пошто је $\triangle DCP \cong \triangle APB$ (по двема катетама), то је $CP = BP$ и $\triangle CPN \cong \triangle BPN$ (јер су све три одговарајуће стране подударне), одакле следи $\angle PNB = \angle PNC = 90°$. Даље, непосредним рачуном се провери да

$$\frac{EG}{HG} = \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} \quad \text{и} \quad \frac{HG}{HT} = \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\,,$$

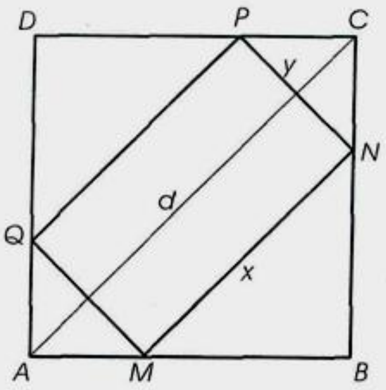
тј. $\dfrac{EG}{HG} = \dfrac{HG}{HT}$ и $\angle EGH \cong \angle GHT$. Према томе, троуглови EGH и GHT су слични, а отуда следи $\angle TGH = \angle HEG = 90°$.

Дакле, на Слици 1. представљене су све величине из ланца неједнакости (I). Како у правоуглом троуглу катета никад није већа од хипотенузе, лако се са слике види да су те величине повезане приказаним неједнакостима (II). Знаци једнакости вреде само када је $a = b$, тј. када су основице трапеза једнаке.

Задатак 4. Између свих правоугаоника $MNPQ$ чија темена, редом, припадају страницама датог квадрата $ABCD$, странице a и чије су странице паралелне са дијагоналама квадрата, одредити онај са највећом површином.

Решење. Означимо са x, y дужине страница правоугаоника $MNPQ$ (Слика 3.), а са d дужину дијагонале квадрата. Очигледно је $x+y=d$, па за површину правоугаоника добијамо

$$P = xy = x(d-x), \quad 0 < x < d.$$



Слика 3.

Како је $x > 0$ и $d - x > 0$, применом неједнакости између геометријске и аритметичке средине налазимо

$$P(x) = x(d-x) \leq \left(\frac{x+d-x}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Једнакост се постиже кад је $x = d - x$, тј. кад је $x = \dfrac{d}{2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$ и $y = d - x = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$. Према томе, правоугаоник $MNPQ$ ће имати највећу површину ако су му странице једнаке, тј. ако је квадрат странице $\dfrac{a}{2}\sqrt{2}$. Тада

$$P_{\max}(x) = P\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2.$$

Задатак 5. Две стране (стенке) кутије у облику квадрата, запремине $V = 1m^3$, направљене су од једне врсте материјала, а четири друге стенке од другог материјала, који кошта 8 пута мање. При којим димензијама x, y, z кутије цена материјала потребног за ту кутију је најмања?

Решење: По услову задатка $xyz = 1$. Нека је цена $1m^2$ другог (јефтинијег) материјала једнака p. Могућа су два случаја: Две стенке направљене од првог (скупљег) материјала

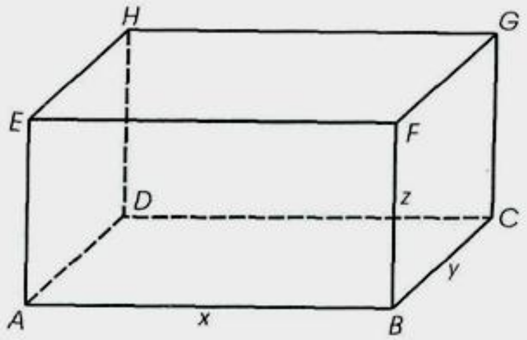
1) су суседне,

2) нису суседне.

У првом случају цена материјала за кутију је једнака:

$$S_1 = 8p(xy + yz) + p(xy + yz + 2xz) = 8pxy + 8pyz + pxy + pyz + 2pxz =$$

$$= 9pxy + 9pyz + 2pxz = pxyz\left(\frac{9}{z} + \frac{9}{x} + \frac{2}{y}\right) = p\left(\frac{9}{z} + \frac{9}{x} + \frac{2}{y}\right).$$



Слика 4.

У другом случају цена материјала је једнака:

$$S_2 = 8p \cdot 2xy + p(2xz + 2yz) = 2pxyz\left(\frac{8}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) = 2p\left(\frac{8}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right).$$

У оба случаја узето је у обзир да је $xyz = 1$.

Примењујући неједнакост (GA) између аритметичке и геометријске средине имамо:

$$S_1 = p\left(\frac{9}{z} + \frac{9}{x} + \frac{2}{y}\right) \geq 3p\sqrt[3]{\frac{9 \cdot 9 \cdot 2}{xyz}} = 3p\sqrt[3]{81 \cdot 2} = 3p\sqrt[3]{3^4 \cdot 2} = 3p\sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = 9p\sqrt[3]{6}.$$

$$S_2 = 2p\left(\frac{8}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \geq 6p\sqrt[3]{\frac{8}{xyz}} = 6p\sqrt[3]{8} = 12p.$$

Дакле, $S_1 \geq 9p\sqrt[3]{6}$, а $S_2 \geq 12p$.

Лако се види да је

$$12p < 9p\sqrt[3]{6}, \quad \text{тј.} \quad S_2 < S_1.$$

Цена S_2 ће бити најмања кад збир

$$\frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$$

постиже најмању вредност. Користећи неједнакост (GA) и услов $xyz = 1$, налазимо

$$\frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{xyz}}, \quad \frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x} \geq 6\,.$$

Једнакост вреди када је

$$\frac{8}{z}=\frac{1}{y}=\frac{1}{x}, \quad \text{одакле следи} \quad x=y \quad \text{и} \quad z=8x\,.$$

Како је $xyz = 1$, следи $8x^3 = 1$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=4$.

Дакле, кутија ће бити најјефтинија ако стенке од првог материјала су несуседне и имају облик квадрата са страницом $\frac{1}{2}m$, а растојање међу њима је $4m$.

Задатак 6. Нека је

$$F^{[\alpha,\beta]}(a_1,a_2)=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha}{a_1^\beta+a_2^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},$$

где су a_1, a_2 позитивни бројеви, $\alpha \neq \beta$ реални бројеви. Доказати да:

а) Класе средина $C^{[\alpha]}$ и $D^{[\alpha]}$ су специјални случајеви класе $F^{[\alpha,\beta]}$;

б) $F^{[\alpha,\beta]}$ има својство монотоности па α (при фиксираном β) и по β (при фиксираном α).

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2002/03 година