Сојузен натпревар 1982

Седмо одделение

1. Учениците A, B, C, D се натпреварувале во трчање. Секој од нив го прогнозирал редоследот на целта на трката. Ученикот A: $ABDC$, ученикот B: $BACD$, ученикот C: $CBDA$, ученикот D: $DCBA$. Се покажало дека никој точно не го прогнозирал редоследот на сите натпреварувачи на целта, туку само еден од нив го погодил местото само на еден од натпреварувачите, Каков бил редоследот на целта на трката?

   Решение. Да ги запишеме дадените прогнози во облик на квадратна табела:

   $$\begin{array}{ll} A: & ABDC \\ B: & BACD \\ C: & CBDA \\ D: & DCBA \end{array}$$

   Сите четири ученици различно го прогнозирала победникот на трката, што значи дека некој од нив сигурно погодил кој е прв. Сега од условот на задачата следува дека никој не го погодил редоследот на другите натпреварувачи. Од табелата гледаме дека никој не прогнозирал дека D ќе биде втор, ниту дека A ќе биде трет, ниту дека B ќе биде четврт. Според тоа, прв бил C, и тој единствено ја погодил својата победа. Конечно, редоследот бил: $CDAB$.

2. Определи го остатокот од делењето на бројот 3^{100} со 13.

   Решение. Имаме $3^3 = 2 \cdot 13 + 1$, т.е. $3^3 = 13k + 1$. Понатаму,

   $$3^3 \cdot 3^3 = (13k+1)^2 = 169k^2 + 26k + 1 = 13(13k^2 + 2) + 1 = 13m + 1.$$

   Потоа,

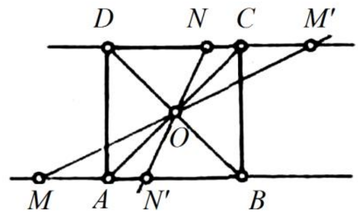
   $$\begin{aligned} 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 &= (13k+1)(13m+1) = 169km + 13k + 13m \\ &= 13(13km + k + m) + 1 = 13n + 1, \end{aligned}$$

   итн. Со натамошно множење со 3^3 секогаш добиваме број кој при делење со 13 дава остаток 1. Затоа $3^{99} = (3^3)^{33} = 13p + 1$. Конечно,

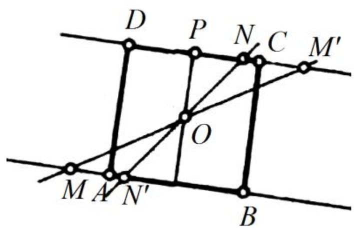
   $$3^{100} = 3^{99} \cdot 3 = 3(13p+1) = 13 \cdot 3p + 3,$$

па затоа остатокот од делењето на 3^{100} со 13 е еднаков на 3.

3. Дадени се три точки M,N,O кои не припаѓаат на една права. Конструирај квадрат $ABCD$ така што точката M припаѓа на правата AB, точката N припаѓа на правата CD и точката O ед пресекот на дијагоналите на тој квадрат.

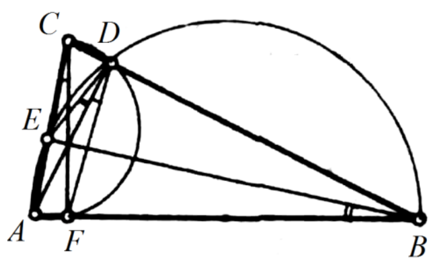


Решение. Паралелните прави AB и CD се централно симетрични во однос на точката O (цртеж десно). Затоа точката M' која е симетрична на M припаѓа на правата CD, а точката N' која е симетрична на точката N припаѓа на правата AB.



Користејќи се со точките M' и N' можеме да ги конструираме правите AB (определена со точките M и N') и CD (определена со точките M' и N). Понатаму, конструкцијата може да се реализира на повеќе начини. На цртежот лево е повлечена нормала OP на правата CD. Отсечката Op е еднаква на половина од страната на квадратот и ова е искористено за конструкцијат ан точките A,B,C,D.

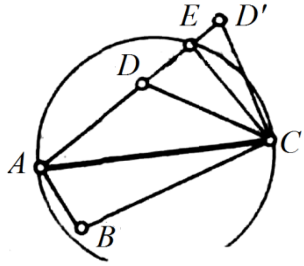
4. Во остроаголен триаголник ABC подножјата на висините се темиња на триаголникот DEF. Докажи дека висините на триаголникот ABC се симетрали на аглите на триаголникот DEF.



Решение. Ќе докажеме, на пример, дека правата AD е симетрала на $\measuredangle EDF$ (цртеж десно). Аглите AEB и ADB се прави, па круижницата k со дијаметар AB минува низ точките E и D (аголот над дијаметар е прав). Затоа $\measuredangle ADE = \measuredangle ABE$ (агли над ист лак). Слично, кружницата k' со дијаметар AC минува низ точките D и F и $\measuredangle ADF = \measuredangle ACF$. Освен тоа, од $BE \perp AC$ и $CF \perp AB$ следува дека $\measuredangle ABE = \measuredangle ACF$ (агли со нормални краци). Оттука следува дека $\measuredangle ADF = \measuredangle ADE$, што значи дека правата AD е симетрала на $\measuredangle EDF$.

5. Во даден четириаголник три агли се тапи. Докажи дека поголема е онаа дијагонала која го содржи темето на остриот агол.

Решение. Нека $\measuredangle ACB$ е остар агол (цртеж десно). Конструираме кружница со дијаметар AC. Ќе докажеме дека темето D лежи во внатрешноста на кружницата. Имено, тоа не може да припаѓа на кружницата, бидејќи тогаш треба $\measuredangle ADC$ да е прав агол. Ако точката D е надвот од кружницата, како точката D', тогаш триаголникот CED' ќе биде правоаголен, па затоа $\measuredangle AD'C$ ќе биде остар. Значи, единствено точката D може да е во внатрешноста на кружницата. Слично докажуваме дека и точката B е во внатрешноста на кружницата. Оттука следува дека дијагоналата BD е во внатрешноста на кружницата, што значи $BD < AC$.



Осмо одделение

1. Предната гума на моторциклот се истрошува по поминати $25000\,km$, а задната по поминати $15000\,km$. По колку поминати километри треба да се променат местата на гумите за да двете гуми истовремено се истрошат? По колку поминати километри мотоциклистот треба да купи нови гуми?

Решение. За да гумите еднакво се истрошат мора да се возат еднаков број километри на предното и на задното тркало. Нека претпоставиме дека секоја гума помине $x\,km$ на предното и $x\,km$ на задното тркало. Тогаш за x важи $\frac{1}{25000} + \frac{1}{15000} = \frac{1}{x}$, од каде добиваме $x = 9375\,km$. Значи, мотоциклистот ќе ги смени местата на гумите по $9375\,km$, а по $18750\,km$ треба да купи нови гуми.

2. а) Пресметај

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

б) Користејќи го равенството добиено под а) определи прост број p таков што $2p^2+1=k^5$, каде k е природен број.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}(a-b)&(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=\\&=a^5+a^4b+a^5b^2+a^2b^3+ab^4-a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5\\&=a^5-b^5.\end{aligned}$$

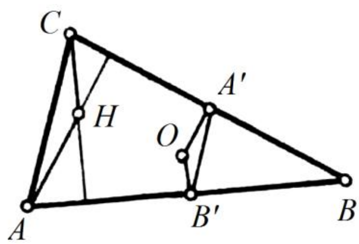
б) Од $2p^2+1=k^5$ добиваме $2p^2=k^5-1$, па според а) добиваме

$$2p^2=(k-1)(k^4+k^3+k^2+k+1). \qquad (1)$$

Бидејќи $2p^2=k^5-1$, добиваме дека k^5 е непарен број, што значи дека k е непарен број, на пример $k=2n+1$ и $k>1$, па $n\in\mathbb{N}$. Сега со замена во (1) и по скратување со 2 имаме $p^2=n(k^4+k^3+k^2+k+1)$. Но, p е прост број, па затоа последното равенство е можно само ако $n=1$ или $n=k^4+k^3+k^2+k+1$. Бидејќи $k=2n+1$, т.е. $k>n$ не е можно $n=k^4+k^3+k^2+k+1$. Значи, $n=1$, а оттука $k=3$. Со замена $k=3$ добиваме $p^2=3^4+3^3+3^2+3+1=121$. Бараниот број е $p=11$.

3. Докажи дека во секој триаголник ABC растојанието од ортоцентарот до темето A е два пати поголемо од растојанието од центарот на опишаната кружница до страната BC на тој триаголник.

Решение. Нека H е ортиоцентарот, O е центарот на опишаната кружница и A' и B' се соодветно средините на страните BC и AC, (цртеж десно).



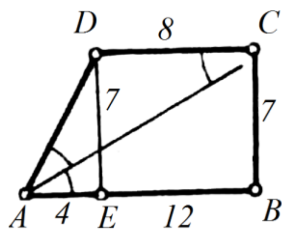
Триаголниците ACH и $A;B;O$ имаат соодветни агли со паралелни краци, што значи имаат еднакви агли, па затоа се слични. Бидејќи коефициентот на сличност е $AC:A'B'=2$, заклучуваме дека страната AH на триаголникот ABH е два пати поголема од соодветната страна на риаголникот $A'B'O$, што и требаше да се докаже.

4. Во трапезот $ABCD$ важи

$$AB=12, BC=7, CD=8 \text{ и } \measuredangle ABC=90^\circ .$$

Дали симетралата на внатрешниот $\measuredangle DAB$ го сече кракот BC или основата CD?

Решение. Нека C' е е точката во која симетралата на $\measuredangle DAB$ ја сече правата DC. Ако $DC'<DC$, тогаш симетралата ја сече основата CD. Да ја пресметаме должината на отсечката DC'. По препоставка $\measuredangle BAC'=\measuredangle DAC'$, а $\measuredangle BAC'=\measuredangle DC'A$ како наизменични агли меѓу две паралелни прави (цртеж десно). Оттука следува $\measuredangle DAC'=\measuredangle DC'A$, т.е. триаголникот ADC' е рамнокрак и $DC'=AD$.



Нека E е подножјето на висината од D на AB. Од правоаголниот триаголник AED имаме:

$$DC'=AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}>8.$$

Значи, $DC'>DC$, па затоа симетралата на $\measuredangle DAB$ го сече кракот BC.

5. Докажи дека во секој триаголник ABC важи

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{\rho}, \tag{1}$$

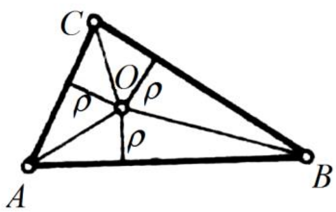
каде h_a,h_b,h_c се висините, а ρ е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

Решение. За плоштината P на триаголникот ABC имаме

$$P=\frac{a\rho}{2}+\frac{b\rho}{2}+\frac{c\rho}{2},$$

па затоа

$$\frac{a}{2P}+\frac{b}{2P}+\frac{c}{2P}=\frac{1}{\rho}. \tag{2}$$



Од друга страна знаеме дека

$$\frac{2P}{a}=h_a, \frac{2P}{b}=h_b, \frac{2P}{c}=h_c$$

и ако замениме во равенството (2) го добиваме равенството (1).