Даниел Велинов,
Скопје

НЕКОИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ ЗАДАЧИ ОД ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. (IMO Shortlist problems 1989) Множеството од реални броеви $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ ги задоволува следните услови:

а) $a_0 = a_n = 0$

б) за $1 \le k \le n-1$, $a_k = c + \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1})$.

Докажи дека $c \le \frac{1}{4n}$.

Решение. Дефинираме $S_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, $k = 0,1,2,...,n$ и $S_{-1} = 0$. Да забележиме дека $S_{n-1} = S_n$. Следува дека

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k = nc + \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}) \\ &= nc + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}) = \\ &= nc + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1})\sum_{k=0}^{i} a_{i-k} \\ &= nc + \sum_{i=0}^{n-1}(S_{i+1} - S_{i-1})S_i = nc + S_n{}^2 \end{aligned},$$

односно $S_n{}^2 - S_n + nc = 0$. Бидејќи S_n е реален број, $D \ge 0$, односно $c \le \frac{1}{4n}$.

2. (IMO Shortlist problems 1989) Нека m е непарен природен број и $m \ge 2$. Најди го најмалиот природен број n таков што 2^{1989} го дели $m^n - 1$.

Решение. Нека n е бараниот експонент и нека $n = 2^k q$, каде q е непарен природен број. Тогаш имаме,

$$m^n - 1 = (m^{2^k} - 1)(m^{2^k(q-1)} + ... + m^{2^k} + 1) = (m^{2^k} - 1)A,$$

каде A е непарен. Тогаш $m^n - 1$ и $m^{2^k} - 1$ се деливи со 2^{1989}, па и $n = 2^k$.
Понатаму, да забележиме дека

$$m^{2^k} - 1 = (m^{2^{k-1}} - 1)(m^{2^{k-1}} + 1) = ... = (m^2 - 1)(m^2 + 1)(m^4 + 1) \cdot \ldots \cdot (m^{2^{k-1}} + 1).$$

Нека s е максимален природен број така што $m \equiv \pm 1 (\bmod 2^s)$. Тогаш $m^2 - 1$ е делив со 2^{s+1} и не е делив со 2^{s+2}. Сите броеви $m^2 + 1, m^4 + 1, ..., m^{2^{k-1}} + 1$ се деливи со 2, но не се деливи со 4. Па, $m^{2^k}-1$ е делив со 2^{s+k}, но не е делив со 2^{s+k+1}. Следува дека најмалиот експонент е 2^{1989-s}, ако $s\le 1989$ и $n=1$ ако $s>1989$.

3. (IMO 1969) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a со следново својство: бројот $z=n^4+a$ не е прост број за боило кој природен број n.

Решение. Нека $a=4m^4$, $m\in\mathbb{N}$. Тогаш имаме

$$z=n^4+4m^4=(n^2+2m^2)^2-(2nm)^2=(n^2+2m^2-2mn)(n^2+2m^2+2mn).$$

Бидејќи

$$n^2+2m^2-2mn=(m-n)^2+m^2>m^2,$$

бројот z е сложен број. Па, најдовме бесконечно многу a, кои го задоволуваат условот на проблемот.

4. (IMO 1970) За кој природен број n, производот на некои од броевите $n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5$ е еднаков на производот од останатите?

Решение. *Прв начин.* Нека претпоставиме дека n е таков природен број. Ако простиот број p дели некој од броевите $n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5$, тогаш тој мора да дели уште еден од нив, па единствени можности се $p=2,3,5$. Бидејќи $n+1,n+2,n+3,n+4$ немаат прости делители различни од 2 и 3, (ако некој прост делител поголем од 3, дели еден од нив, тогаш никој од останатите броеви не може да го има тој делител). Бидејќи два од тие бреови се непарни, тогаш тие мора да бидат степени на 3 (поголеми од 1), а такви броеви нема (степени со основа 3, а разликата помеѓу нив е 2). Така, не постои природен број n кој ги задоволува условите на задачата.

Втор начин. Јасно никој од броевите не е делив со 7, па тие формираат редуциран систем на остатоци. Имаме $n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+5)\equiv 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 6\equiv -1 \pmod 7$. Ако множеството $\{n,...,n+5\}$ се подели на две подмножества со исти производи и двете конгруентни со p по модул 7, тогаш $p^2\equiv -1 \pmod 7$, што не е можно.

Забелешка. Erdős докажал дека множеството $\{n,n+1,...,n+m\}$ од $(m+1)$-последователни природни броеви не може да се подели на две подмножества со исти производи на елементите.

5. Нека е даден позитивен цел број k поголем од 1. Докажи дека постои прост број p и строго растечка низа од позитивни цели броеви $a_1,a_2,...,a_n,...$ така да сите членови од низата $p+ka_1,p+ka_2,...,p+ka_n,...$ се прости броеви.

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на принципот на Дирихле. За секој $i=1,2,...,k-1$, со P_i ќе го означиме множеството од сите прости броеви конгруентни со i модул k. Секој прост број (освен можеби самиот k) е содржан во точно едно од множествата $P_1, P_2, ..., P_{k-1}$. Бидејќи има бесконечно многу прости броеви, најмалку едно од овие множества е бесконечно, на пример нека биде P_i. Нека $p = x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$ се неговите елементи наредени во растечки редослед и уште, $a_n = \frac{x_{n+1} - p}{k}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Тогаш $p + ka_n$ е некој од елементите од P_i, почнувајќи од x_2. Броевите a_n се природни броеви. Простиот број p и низата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ го имаат бараното својство.

6. (AIME 1994) Нека $n \in \mathbb{N}$ и $p(n)$ е производот на цифрите кои се ненулти и го формираат n. (Ако n има една цифра, тогаш $p(n)$ е еднакво на таа цифра). Нека $S = p(1) + p(2) + ... + p(999)$. Кој е најголемиот прост број со кој се дели S?

Решение. Секој природен број кој е помал од 1000 ќе го разгледуваме како трицифрен број со додавање на нули пред цифрите. Сумата на цифрите со вака запишани броеви е:

$$(0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + ... + 9 \cdot 9 \cdot 9) - (0 \cdot 0 \cdot 0) = (0 + 1 + + 2 + ... 9)^3 - 0 .$$

Сумата S може да се најде со замена на 0 со 1 во горната репрезентација. Па, имаме

$$S = 46^3 - 1 = (46-1)(46^2 + 46 + 1) = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103 .$$

Па, бараниот прост број е 103.

7. (Russia, 1995) Нека $m, n \in \mathbb{N}$ така да Н.З.С (m,n) + Н.З.Д (m,n) $= m + n$. Докажи дека еден од броевите е делител на другиот.

Решение. Нека $d =$ Н.З.Д (m,n). Нека $m = ad$ и $n = bd$, Н.З.Д $(a,b) = 1$ и

$$НЗС(m,n) = \frac{mn}{НЗД(m,n)} = abd .$$

Па дадената равенка можеме да ја запишеме како $abd + d = ad + bd$ односно $ab - a - b + 1 = 0$. Следува дека $(a-1)(b-1) = 0$, од каде добиваме дека $a = 1$ или $b = 1$, односно или $m = d$ и $n = bd = bm$ или $n = d$, $m = an$, што и требаше да се докаже.

8. (Austrian-Polish Math Olympiad) Докажи дека за било кои природни броеви a и b, бројот $(36a + b)(a + 36b)$ не може да биде степен со основа 2.

Решение. Нека $a = 2^c p, b = 2^d q$, каде p и q се непарни. Без губење на општоста претпоставуваме дека $c \geq d$. Тогаш,

$$36a + b = 36 \cdot 2^c \cdot p + 2^d \cdot q = 2^d (36 \cdot 2^{c-d} p + q) .$$

Последователно,

$$(36a+b)(36b+a)=2^d(36\cdot 2^{c-d}\cdot p+q)(36b+a)$$

или нетривијален непарен множител $36\cdot 2^{c-d}p+q$, па $(36a+b)(a+36b)$ не е степен со основа 2.

9. (IMO 1989) За кои природни броеви n, постои природен број N така да ниту еден од броевите $N+1, N+2, ..., N+n$ не е степен на прост број?

Решение. *Прв начин.* За секој n постои N. За дадено n избираме

$$N=(n+1)!^2+1.$$

Тогаш $1+j$ е делител на $N+j=(n+1)!^2+j+1$, за $1\le j\le n$. Па, ако $N+j=p^m$, тогаш $1+j=p^r$, за некој $r\in\mathbb{N}, 1\le r<m$. Но, тогаш p^{r+1} го дели $(n+1)!^2=N-1$ и $p^m=N+j$, од каде следува дека $p^{r+1}\,|\,1+j$, што е невозможно. Следува дека ниту еден од броевите $N+1, N+2, ..., N+n$ не е степен на прост број.

Втор начин. Нека $p_1, p_2, ..., p_{2n}$ се различни прости броеви. Од Кинеската теорема за остатоци имаме дека постои природен број N, таков што

$$p_1p_2\,|\,N+1, p_3p_4\,|\,N+2, ..., p_{2n-1}p_{2n}\,|\,N+n,$$

па очигледно никој од броевите не е степен на прост број.

10. (IMO 1986) Нека d е произволен природен број различен од $2, 5$ или 13. Докажи дека може да се најдат различни a и b во множеството $\{2,5,13,d\}$ така да $ab-1$ не е полн квадрат.

Решение. Бидејќи $2\cdot 5-1=3^2$, $2\cdot 13-1=5^2$, $5\cdot 13-1=8^2$, ние ќе бараме број кој не е полн квадрат во множеството $\{2d-1, 5d-1, 13d-1\}$. Да претпоставиме спротивно дека сите овие броеви се полни квадрати, односно

$2d-1=a^2,\ 5d-1=b^2, 13d-1=c^2,$

каде $a,b,c\in\mathbb{N}$. Тогаш a е непарен број, т.е. $a=2x+1$ и $d=2x(x+1)+1$. Бидејќи $x(x+1)$ е секогаш парно, следува $d\equiv 1 \pmod 4$, па следува дека b и c се парни. Да претпоставиме дека $b=2y$, $c=2z$. Од $5d=b^2+1$ и $13d=c^2+1$ имаме

$$8d=c^2-b^2,$$

па

$$d=\frac{4y^2+1}{5}=\frac{4z^2+1}{13}=\frac{4z^2-4y^2}{8}\frac{z^2-y^2}{2}.$$

Оттука, имаме дека y и z имаат иста парност. Уште повеќе $z^2\equiv y^2 \pmod 4$, додека $d\equiv 1 \pmod 4$, па добиваме контрадикција.

11. (IMO Shortlist problems 1986) Нека n е природен број и нека p е прост број, $p>3$. Најди најмалку $2(n+1)$ низи од природни броеви x,y,z за кои важи $xyz=p^n(x+y+z)$ различни до пермутација.

Решение. Нека $x=p^{\alpha}x', y=p^{\beta}y', z=p^{\gamma}z'$, каде $p\nmid x'y'z'$ и $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Од дадената равенка имаме дека $p^n(x+y)=z(xy-p^n)$, па $z'|x+y$. Бидејќи $p^{\gamma}|x+y$ следува дека $z|x+y$, односно $x+y=qz$. Од равенката заедно со последниот услов, имаме

$$xy=p^n(q+1) \text{ и } x+y=qz \qquad (1)$$

Обратно, секое решение на (1) дава решение на почетната равенка.

За $q=1$ и $q=2$ ги добиваме следниве класи од $(n+1)$ решенија (за секоја од нив соодветно):

За $q=1$: $(x,y,z)=(2p^i, p^{n-i}, 2p^i+p^{n-i}), i=0,1,2,...,n$.

За $q=2$: $(x,y,z)=(3p^j, p^{n-j}, \frac{3p^j+p^{n-j}}{2}), j=0,1,2,...,n$.

За $n=2k$ овие две класи на решенија имаат заедничко решение $(2p^k, p^k, 3p^k)$ инаку сите други решенија се различни, т.е. вкупно на број $2n+1$. Друго решение кое не е вклучено во горната класа на решенија за $p>3$ е решението $(x,y,z)=$ $(1,\frac{p^n(p^n+3)}{2}, p^2+2)$, па имаме вкупно $2(n+1)$ решенија.

12. (IMO Shortlist problems 1987) а) Нека $НЗД(m,k)=1$. Докажи дека постојат природни броеви $a_1,a_2,...,a_m$ и $b_1,b_2,...,b_k$ така да секој производ a_ib_j, $i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,k$ дава различен остаток поделен со mk.

б) Нека $НЗД(m,k)>1$. Докажи дека за било кои природни броеви $a_1,a_2,...,a_m$ и $b_1,b_2,...,b_k$ може да се најдат два производи a_ib_j и a_sb_t, $(i,j)\neq(s,t)$ што имаат ист остаток при делење со mk.

Решение. а) Нека $a_i=ik+1,\ i=1,2,...,m$ и $b_j=jm+1,\ j=1,2,...,k$. Да претпоставиме дека

$mk\,|\,a_ib_j-a_sb_t=(ik+1)(jm+1)-(sk+1)(tm+1)=km(ij-st)+m(j-t)+k(i-s)$.

Бидејќи m е делител на оваа сума мора $m|k(i-s)$, што заедно со $Н.З.Д(k,m)=1$ дава $i=s$. Сосема аналогно добиваме дека $j=t$, од каде следува дека $a_ib_j=a_sb_t$, односно исполнети се условите од а)

б) Да претпоставиме спротивно, т.е. сите остатоци се различни. Тогаш и остатокот 0 се појавува, на пример кај a_1b_1, т.е. $mk\,|\,a_1b_1$, па за некои $i, i\neq s$,

$a'|a_i - a_s$, добиваме дека $mk = a'b'|a_ib_1 - a_sb_1$ што е контрадикција. Од ова добиваме дека $a' \geq m$ и аналогно добиваме $b' \geq k$, па од $a'b' = mk$ имаме дека $a' = m$ и $b' = k$. Исто така добиваме: сите a_i имаат различни остатоци модул $m = a'$ и сите b_j имаат различни остатоци модул $k = b'$. (*)

Нека p е заеднички прост делител на m и k. Од (*) точно $m - \frac{m}{p} = \frac{p-1}{p}m$ од a_i и точно $k - \frac{k}{p} = \frac{p-1}{p}k$ од b_j не се деливи со p. Па, според тоа точно $\frac{(p-1)^2}{p^2}mk$ производи a_ib_j кои не се деливи со p, иако од претпоставката сите тие даваат различни остатоци, па следува дека бројот на такви производи е $\frac{p-1}{p}mk \neq \frac{(p-1)^2}{p^2}mk$, што е контрадикција, од каде следува точноста на б).

Задачи за самостојна работа

1. Нека $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, каде a и b се природни броеви, x не е цел број и $x < 1976$. Докажи дека децималниот дел на x не надминува $10^{-19,76}$.
2. Најди го најголемиот број кој е производ на природни броеви, чија сума е 1976.
3. Во конечна низа од реални броеви сумата на било кои седум последователни броеви е негативна и сумата на било кои единаесет последователни членови е позитивна. Одреди го максималниот број на членови на таа низа.
4. Нека a и b се природни броеви и нека q и r се количникот и остатокот соодветно на делењето на $a^2 + b^2$ со $a + b$.Одреди ги броевите a и b ако $q^2 + r = 1977$.

Користена литература

1. T. Andreesu, D. Andrica, Z. Feng, 104 Number Theory problems, Birkhäuser, Boston, 2007.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011.
3. G. H. Hardy, E. M. Wright,An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press., 2008.
4. A. Liu, Chinese Mathematics competitions and Olympiads 1981-1993, AMT Publishing, Canberra, 1998.
5. A. Liu, Chinese Mathematics competitions and Olympiads 1993-2001, Book 2, AMT Publishing, Canberra, 2005.
6. A. Negut, Problems for the Mathematical Olympiads, GIL Publishing House, 2005.
7. I. M. Vinogradov, Elements of Number Theory, Mineola, NY: Dover Publications, 2003.