Ристо Малчески, Скопје
Алекса Малчески, Скопје

ЗЛАТЕН ПРЕСЕК

Развојот на математичката мисла во античкиот период доведува до поставување на “трите важни математички проблеми на антиката”, кои математичарите во тоа време започнале да ги проучуваат. Тие проблеми се:

1. Трисекција на агол, т.е. произволен агол да се подели на три еднакви дела.
2. Удвостручување на коцка, т.е. да се одреди раб на коцка која ќе има волумен двапати поголем од волуменот на дадена коцка (таканаречен делфијски проблем).
3. Квадратура на круг, т.е. да се најде таков квадрат чија плоштина ќе биде еднаква на плоштината на даден круг.

Значењето на овие проблеми е во тоа што тие не можат точно да се решат со помош на конечен број конструкции на прави линии и кружници. Тоа може да се направи само приближно, па затоа овие проблеми поттикнале развој на нови математички дисциплини и довеле до откривање на многу интересни резултати. Првите два проблеми обично биле сведувани на наоѓање на две отсечки, x и y, кои го задоволуваат равенството $a:x=x:y=y:b,$ каде a и b се дадени отсечки. Оваа задача е проширување на задачата за наоѓање на геометриска средина од отсечките a и b, т.е. за наоѓање на отсечка x за која важи $a:x=x:b,$ но двократната геометриска средина не може да се најде само со помош на шестар и линијар. Еден од интересните резултати кој е добиен при обидите да се решат овие важни проблеми е наоѓањето на поделбата на дадена отсечка по златен пресек, за која ќе стане збор во нашите разгледувања.

1. ОД ИСТОРИЈАТА НА ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК

Поимот златен пресек и неговата конструкција се среќеваат уште во Евклидовото дело ***“ЕЛЕМЕНТИ”,*** (III век пред новата ера), во кое се собрани и систематизирани сите тогашни знаења од геометријата. Меѓутоа, златниот пресек бил познат и пред Евклид. Имено, Питагора и неговите ученици (VI век пред новата ера) освен филозофијата и математиката ја изучувале и хармонијата на светот. Питагорејците тежнееле сите природни и општествени законитости да ги објаснат со помош на броевите. Тие во броевите и нивните пропорции барале нешто магично, натприродно. Затоа, златниот пресек го сметале како нешто совршено хармонично, златно подредување на светот. Ова е и една од причините што тие му се восхитувале на ѕвездениот петаголник, кој го формираат дијагоналите на правилниот петаголник. Така, Питагорејците ѕвездениот петаголник го прифатиле за свој симбол и за симбол на здравјето, кое е основа на хармонијата во животот.

Понесени од откритијата на античките математичари и средновековните математичари му посветиле посебно внимание на златниот пресек. Така, тие златниот пресек го нарекувале **Divina proportio,** што на латински значи *божествена пропорција,* и сметале дека истата е божји дар, кој од олимписките височини на математиката слегол во обичните учебници.

2. ГЕОМЕТРИСКА СРЕДИНА НА ДВЕ ОТСЕЧКИ

Размер меѓу две отсечки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ е количникот на мерните броеви што ги искажуваат нивните должини искажани во иста мерна единица. Притоа запишуваме $\overline{AB}:\overline{CD}$.

Бидејќи количникот на два еднакво именувани броја е неименуван број, јасно е дека и размерот е неименуван број.

Ако размерите на отсечките $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$ и на отсечките $\overline{MN}=c$, $\overline{PQ}=d$ се еднакви, т.е. $\overline{AB}:\overline{CD}=k$ и $\overline{MN}:\overline{PQ}=k$ тогаш пишуваме $\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{MN}:\overline{PQ}$ т.е.

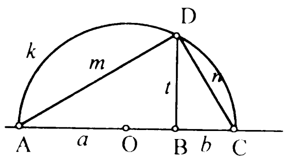
(1) $$a:b=c:d$$

Равенството (1) го нарекуваме пропорција на отсечките a,b,c,d, а самите отсечки членови на пропорцијата. Отсечките a и d се надворешни, а отсечките b и c внатрешни членови на пропорцијата (1).

Ако во пропорцијата (1) меѓусебно се еднакви или внатрешните или надворешните членови, т.е. ако

(2) $$a:b=b:c \text{ или } a:b=c:a$$

тогаш оваа пропорција ја нарекуваме непрекината пропорција. Од пропорцијата $a:b=b:c$ имаме $b^2=ac$, односно $b=\sqrt{ac}$, што значи дека b е геометриска средина на a и c. Слично, од $a:b=c:a$ имаме $a=\sqrt{bc}$, т.е. a е геометриска средина на b и c.



Задача 1. Конструирајте ја геометриската средина на отсечките b и a.

Решение. На полуправата AS нанесуваме отсечки $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$. Потоа, над $\overline{AC}$ како дијаметар конструираме кружница $K(O, \frac{a+b}{2})$. Во точката B констрираме нормала на правата AS и го наоѓаме пресекот D со кружницата $K(O, \frac{a+b}{2})$. Отсечката $\overline{BD}$ е бараната геометриска средина на отсечките a и b (цртеж лево).

Навистина, од ΔACD имаме $(a+b)^2 = m^2 + n^2$ и како $m^2 - a^2 = t^2$ и $n^2 - b^2 = t^2$, (ΔABC и ΔBCD) добиваме

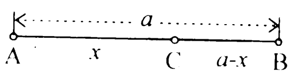
$$a^2 + b^2 + 2ab = m^2 + n^2 \text{ т.е. } 2ab = m^2 - a^2 + n^2 - b^2 \text{ или } 2ab = 2t^2.$$

Конечно, $t = \sqrt{ab}$.

3. ПОДЕЛБА НА ОТСЕЧКА ПО ЗЛАТЕН ПРЕСЕК

Во претходниот дел, задача 1, објаснивме како се конструира геометриска средина меѓу две отсечки a и b. Сега ќе се задржиме на еден пример на непрекината пропорција, во литературата познат како ***златен пресек*** Имено, треба дадена отсечка $\overline{AB} = a$ (цртеж долу), да се подели со точка C на два дела така што целата отсечка $\overline{AB}$ се однесува спрема поголемиот дел $\overline{AC} = x$, како нејзиниот поголем дел $\overline{AC}$ спрема помалиот дел $\overline{CB} = a - x$, т.е.

(3) $$a : x = x : (a - x)$$



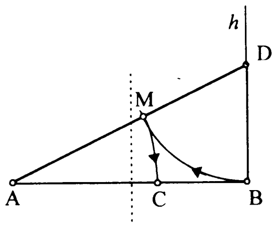
Ваквата непрекината поделба на отсечката $\overline{AB}$ се нарекува поделба по златен пресек. Од пропорцијата (3) добиваме

(4) $$x^2 = a(a - x) \text{ или } x = \sqrt{a(a - x)}$$

т.е. поголемиот дел е геометриска средина на целата отсечка и нејзиниот помал дел.

Задача 2. Конструирајте го златниот пресек на отсечката $\overline{AB} = a$.

Решение. Ја нанесуваме отсечката $\overline{AB} = a$ и во точката B конструираме нормала h на отсечката $\overline{AB}$ (цртеж долу). На нормалата одредуваме точка D, таква што $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.



Ја конструираме отсечката $\overline{AD}$ и на неа одредуваме точка M таква што $\overline{DM} = \overline{DB}$. На крајот, одредуваме точка C на отсечката $\overline{AB}$ таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$. Точката C ја дели отсечката $\overline{AB}$ по златен пресек.

Навистина, од Питагоровата теорема имаме

$$(\overline{AM} + \overline{MD})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2.$$

По конструкција $\overline{AM} = \overline{AC}$, $\overline{MD} = \overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, па затоа

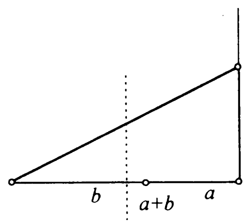
$$(\overline{AC} + \tfrac{1}{2}\overline{AB})^2 = \overline{AB}^2 + (\tfrac{1}{2}\overline{AB})^2 \quad \text{т.е. } \overline{AC}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2.$$

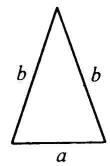
Конечно,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AB}(\overline{AB} - \overline{AC}),$$

што и требаше да се докаже.

Јасно, постојат две поделби на $\overline{AB}$ по златен пресек, во зависност од тоа дали нормалата во првиот чекор од конструкцијата ја повлекуваме во A или B.





Задача 3. Конструирајте рамнокрак триаголник со основа b и крак a ако е даден збирот на основата и кракот $a+b$ и ако се знае дека $a:b = (a+b):a$.

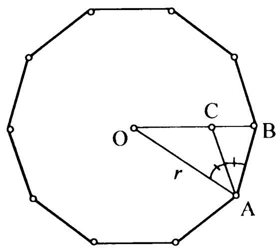
Решение. Од условот на задачата имаме $a:b = (a+b):a$ т.е. $a = \sqrt{(a+b)b}$ што значи дека збирот на страните $a+b$ треба да го поделиме по златен пресек (задача 2), со што ќе ги добиеме основата b и кракот a на рамнокракиот триаголник. Сега конструкцијата на триаголникот е едноставна (цртеж горе).

4. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛЕН ПЕТАГОЛНИК И ПРАВИЛЕН ДЕСЕТАГОЛНИК

Во овој дел ќе ја разгледаме примената на златниот пресек при конструкцијата на правилен петаголник и правилен десетаголник, кога е познат радиусот на опишаната кружница околу нив.

Задача 4. Конструирајте правилен десетаголник, ако е познат радиусот на опишаната кружница околу десетаголникот.

Решение. Прво ќе го докажеме следното помошно тврдење: за радиусот на опишаната кружница *r* и страната *a* на правилниот десетаголник постои следниот сооднос: $r:a=a:(r-a)$.



Да го разгледаме триаголникот *ABO* (цртеж лево). Нека *AC* е симетрала на аголот *OAB*, каде *C* е пресечна точка на таа симетрала и страната *OB*. Бидејќи

$$\angle AOB=36^o,\ \angle OAB=\angle OBA=72^o$$

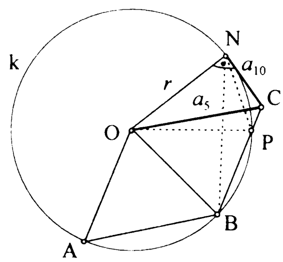
добиваме

$$\angle OAC=\angle CAB=36^o \text{ и } \angle ACB=72^o.$$

Значи, $\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{OC}$ и $\Delta ABO\sim\Delta BCA$. Од сличноста на овие триаголници следува $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC}$ т.е. $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:(\overline{OB}-\overline{OC})$ или $r:a=a:(r-a)$.

Според тоа, за да ја одредиме должината на страната на правилен десетаголник, впишан во кружница со радиус *r*, треба радиусот *r* да го поделиме по златен пресек и за страната на десетаголникот да го земеме поголемиот дел од радиусот.

Конструкција. Цртаме кружница со радиус *r* (цртеж десно) и повлекуваме еден од радиусите $\overline{OA_1}$. Радиусот $\overline{OA_1}$ го делиме по златен пресек со што ја добиваме страната *a* на десетаголникот. Сега почнувајќи од точката A_1 со отворот на шестарот еднаков на *a* последователно ги добиваме темињата



$$A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9 \text{ и } A_{10}.$$

Забелешка. Во претходната задача ја дадовме конструкцијата на правилен десетаголник

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}.$$

Јасно, A_1,A_3,A_5,A_7,A_9 се темиња на правилен петаголник впишан во кружница со радиус *r*.

Во следната задача ќе се задржиме на врската меѓу страните на правилниот петаголник и десетаголник и радиусот на опишаната кружница.

Задача 5. Ако во правоаголен триаголник катетите се еднакви на страната на правилен десетаголник и радиусот на кружницата опишана околу десетаголникот, тогаш хипотенузата е еднаква на страната на вписаниот правилен петаголник. Докажете!

Решение. Нека AB е страната на правилниот петаголник, вписан во кружница со радиус r. Конструираме паралелограм $OABC$. Нека P е пресекот на страната BC со опишаната кружница $K(O,r)$. Бидејќи $\angle OBP = \angle AOB = 72^o$ во рамнокракиот триаголник OBP имаме $\angle BOP = 36^o$, па е $\overline{BP}$ страната на вписаниот десетаголник. Значи, точката P ја дели отсечката $\overline{BC} = r$ по златен пресек, па $\overline{BP}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{PC}$.

Нека N е допирната точка на тангентата конструирана на кружницата од точката C. Да ги разгледаме триаголниците NPC и NBC. Аголот кај темето C е заеднички, т.е. $\angle NCP = \angle NCB$. Понатаму

$$\angle NBC = \tfrac{1}{2}\angle NOP = \tfrac{1}{2}(180^o - 2\angle PNO) = \tfrac{1}{2}\cdot 2(90^o - \angle PNO) = \angle CNP$$

Значи, $\Delta NCP \sim \Delta BNC$, т.е. $\overline{BC} : \overline{NC} = \overline{NC} : \overline{PC}$ или $\overline{NC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{PC}$.

Сега од $\overline{BP}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{PC}$ и $\overline{NC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{PC}$ заклучуваме $\overline{BP} = \overline{NC}$, т.е. $\overline{NC}$ е еднаква на страната на вписаниот правилен десетаголник. Така, докажавме дека правоаголниот триаголник OCN ги има бараните својства

$$\overline{ON} = r, \overline{OC} = a_5, \overline{NC} = a_{10}.$$

5. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК И БРОЕВИТЕ НА ФИБОНАЧИ

Ако во равенката $x^2 = a(a-x)$ ставиме $x = at,\ t > 0,$ ја добиваме равенката $a^2t^2 = a(a-at)$ која е еквивалентна на равенкита $a^2t^2 = a^2(1-t)$ т.е. на равенката

(5) $$t^2 = 1 - t.$$

Равенката (5) можеме да ја запишеме на следниот начин $t^2 + t + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ или $(t+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4},$ од каде што наоѓаме $t + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$ Бидејќи $t > 0,$ негативното решение на равенката (5) го отфрламе и го разгледуваме само позитивното решение $t = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$ Бидејќи, $t = \frac{x}{a} = \frac{a-x}{x} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$, добиваме дека

$t=(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2})a=0,618033989...\cdot a\approx 0,62a$ i $a-x=0,381966010...\cdot a\approx 0,38a$

Сега да ја разгледаме низата

(6) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,... .

Забележуваме дека почнувајќи од третиот член, секој нареден член на оваа низа е збир на претходните два члена. Навистина

2=1+1; 3=2+1; 5=3+2; 8=5+3;

13=8+5; 21=13+8; 34=21+13; ...

Следствено, ако членовите на дадената низа ги означиме со

$a_1,...,a_n,a_{n+1},a_{n+2},...$

тогаш, според досега изнесеното, следува дека низата е зададена со

(7) $a_1=1,\ \ a_2=1,\ \ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\quad n\geq 1.$

Броевите од низата (6) дефинирана со (7) се нарекуваат Фибоначиеви броеви, според италијанскиот математичар Леонардо Фибоначи од Пиза, кој живеел на преминот од XII во XIII век, бидејќи во неговото дело “Книга во абак” прв пат се сретнува оваа низа. Низата на Фибоначи има повеќе интересни својства, од кои овде ќе разгледаме само едно.

Да ги разгледаме количниците на последователните членови на низата на Фибоначи. Имаме:

$\frac{a_1}{a_2}=1;\frac{a_2}{a_3}=\frac{1}{2}=0,5;\frac{a_3}{a_4}=\frac{2}{3}\approx 0,666...;\frac{a_4}{a_5}=\frac{3}{5}=0,6;\frac{a_5}{a_6}=\frac{5}{8}=0,625;\frac{a_6}{a_7}=\frac{8}{13}\approx 0,61538...;$

$\frac{a_7}{a_8}=\frac{13}{21}\approx 0,619047...;\frac{a_8}{a_9}=\frac{21}{34}\approx 0,617647...;\frac{a_9}{a_{10}}=\frac{34}{55}\approx 0,61818...;$

$\frac{a_{10}}{a_{11}}=\frac{55}{89}\approx 0,617977...;...;\frac{a_{13}}{a_{14}}=\frac{377}{610}=0,61803...;...$

Забележуваме дека, ако разгледуваме поголеми членови од низата на Фибоначи, тогаш со нивните количници се повеќе се приближуваме до бројот $t=\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$, т.е. до односот на отсечките при поделбата по златниот пресек. Според тоа, ако n е многу голем број, тогаш $\frac{a_n}{a_{n+1}}\approx\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ