Ристо Малчески
Скопје

ПРИМЕНА НА СИНУСНАТА И КОСИНУСНАТА ТЕОРЕМА

Во редовната настава се изучуваат синусната и косинусната теорема. Во оваа статија ќе се осврнеме на примената на овие две теореми во решавањето на посложени геомериски задачи, т.е. на таканаречените олимписки математички задачи. Пред да преминеме на разгледување на споменатите задачи ќе ги формулираме двете теореми.

Теорема 1 (синусна теорема). Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC, α,β,γ се соодветните спротивни агли на страните и R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот . Тогаш точни се равенствата

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

Доказ. Види [1]. ■

Теорема 2 (косинусна теорема). Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC и α,β,γ се соодветните спротивни агли на страните. Тогаш точни нсе равенствата

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Доказ. Види [1]. ■

Пред да преминеме на разгледување на споменатите задачи, да забележиме дека со синусната и косинусната теорема може да се решат таканаречените основни задачи за триаголник. Со основните задачи и нивното решавање читателот подетално може да се запознае во книгата [1].

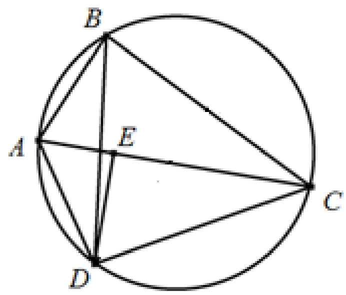
1. Нека D е средината на оној лак BC на опишаната кружница на $\triangle ABC$ на кој е точката A и нека $\overline{AB}<\overline{AC}$. Докажи дека подножјето E на нормалата повлечена од точката D на правата AC ја полови искршената линија составена од отсечките BA и AC.

   Решение. Треба да докажеме $\overline{EC}=\overline{AB}+\overline{AE}$. Нека $\gamma=\measuredangle BCD$. Од правоаголниот триаголник EAD и синусната теорема за триаголникот ADB следува

$$\overline{AE}=\overline{AD}\cos\gamma=2R\sin\measuredangle ACD\cos\gamma. \qquad (1)$$

Од правоагоилниот триаголник EDC и синусната теорема за триаголникот BDC следува

$$\overline{EC}=\overline{CD}\cos\measuredangle ACD=2R\sin\gamma\cos\measuredangle ACD. \quad (2)$$

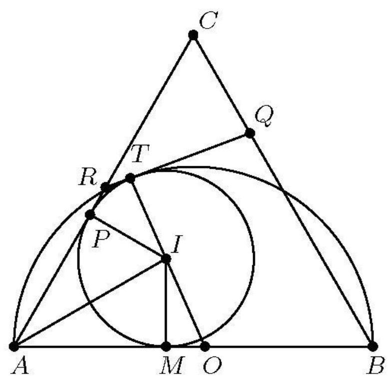


Од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned}\overline{EC}-\overline{AE}&=2R(\sin\gamma\cos\measuredangle ACD-\sin\measuredangle ACD\cos\gamma)\\&=2R\sin(\gamma-\measuredangle ACD)\\&=2R\sin\measuredangle ACB=\overline{AB}.\end{aligned}$$

2. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Над страната AB како над дијаметар е конструирана кружница k. Кружница внатрешно ги допира кружницата k во точката T и страните AN и AC. Тангентата на k во точката T ја сече страната BC во точката Q. Ако $\overline{AB}=6$, определи ја должината на отсечката CQ.

Решение. Средината на AB да ја означиме со O, допирние точки на кружницата $k'(I,r)$ со AB и AC да ги озачиме со M и P, соодветно и нека $TQ\cap AC=R$.



Имаме

$$\overline{AM}=r\sqrt{3},\overline{OM}=3-r\sqrt{3},\overline{OI}=3-r$$

и од правоаголниот $\triangle OMI$ наоѓаме

$$r^2+(3-r\sqrt{3})^2=(3-r)^2,$$

т.е.

$$r=2\sqrt{3}-2.$$

Ако $\overline{RC}=x$, тогаш

$$\overline{RT}=\overline{RP}=6-x-r\sqrt{3}=2\sqrt{3}-x$$

и степенот на точката R во однос на кружницата k' е

$$(3-x)(6-x)=(2\sqrt{3}-x)^2,$$

па затоа $x=\frac{18+8\sqrt{3}}{11}$. Ако $\measuredangle OIM=\varphi$, тогаш

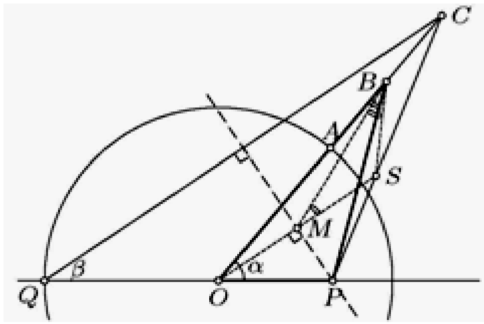
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4} \text{ и } \measuredangle ORC=60^\circ-\varphi.$$

Од синусната теорема за $\triangle RQC$ дбиваме

$$\overline{CQ}=x\frac{\sin(60^\circ-\varphi)}{\sin(60^\circ+\varphi)}=x\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\varphi}=\frac{18+8\sqrt{3}}{11}\cdot\frac{4\sqrt{3}-(3-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})}=2.$$

3. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA}=\overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC. Нека точката $Q \in k$ е таква што $\measuredangle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P. Докажи дека $\measuredangle POB = 2\measuredangle PBO$.

Решение. *Прв начин*. Нека S е точка на отсечката CP таква што $\overline{PS}=\overline{PO}$, а M е средина на отсечката OS. Тогаш



$$\overline{CS}=\overline{QO}=\overline{CA} \text{ и } \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{CS}}{\overline{CO}}=\frac{1}{2}$$

следува $\triangle CBS \sim \triangle CSO$ и оттука

$$\overline{SB}=\frac{1}{2}\overline{OS}=\overline{SM}$$

и

$$\measuredangle SOP=\measuredangle OSP=180^\circ-\measuredangle CSO=180^\circ-\measuredangle CBS=\measuredangle OBS.$$

Според тоа, PS и PO се тангенти на опишаната кружница на $\triangle BSO$, а BP е негова симедијана. Сега важи

$$\measuredangle OBP=\measuredangle MBS=\frac{180^\circ-\measuredangle BSM}{2}=\frac{\measuredangle CSB+\measuredangle OSP}{2}=\frac{\measuredangle COS+\measuredangle SOP}{2}=\frac{\measuredangle BOP}{2}.$$

Втор начин. Да означиме $\measuredangle POC=\alpha$, $\measuredangle OQC=\beta$ и $\overline{OA}=1$. Доволно е да докажеме дека

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}=\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=1+2\cos\alpha.$$

Според синусната теорема имаме

$$\frac{1}{2}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}}=\frac{\sin\measuredangle OCQ}{\sin\measuredangle OQC}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-\cos\alpha,$$

т.е. $\mathrm{ctg}\beta=\frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ и оттука

$$\sin\beta\cos\beta=\frac{\mathrm{ctg}\beta}{1+\mathrm{ctg}^2\beta}=\frac{2\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{5+4\cos\alpha}.$$

Понатаму, бидејќи

$$\overline{QC}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} \text{ и } \overline{QP}=\frac{\overline{QC}}{2\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{2\cos\beta\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta\sin\beta}=\frac{5+4\cos\alpha}{2+4\cos\alpha}$$

имаме

$$\overline{OP}=1-\overline{QP}=1-\frac{5+4\cos\alpha}{2+4\cos\alpha}=\frac{3}{2+4\cos\alpha}.$$

Конечно, од $\overline{OB}=\frac{3}{2}$ следува $\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}=1+2\cos\alpha$.

4. Во триаголник ABC впишаната кружница со центар I ги допира страните

AB и AC во точките P и Q, соодветно. Правите BI и CI ја сечат правата PQ во точките K и L, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот ILK ја допира вписаната кружница во триаголникот ABC ако и само ако $\overline{AB}+\overline{AC}=3\overline{BC}$.

Решение. *Прв начин*. Означуваме:

$$\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=b, \measuredangle BAC=\alpha, \measuredangle CBA=\beta, \measuredangle ACB=\gamma \text{ и } \overline{IP}=\overline{IQ}=r.$$

Нека $CK\cap BL=\{D\}$, направи цртеж. Од

$$\measuredangle BKL=\measuredangle BKP=180^\circ-\measuredangle BPK-\measuredangle KBP=\measuredangle APK-\measuredangle KBP=90^\circ-\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{\beta}{2},$$

т.е. $\measuredangle IKL=\frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle IKQ+\measuredangle QCI=180^\circ-\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=180^\circ$, следува дека четириаголникот $IKQC$ е тетивен, при што $\measuredangle IKC=\measuredangle IQC=90^\circ$. Аналогно се добива дека $\measuredangle ILB=90^\circ$. Сега, $\measuredangle BKC=\measuredangle BLC=90^\circ$, што значи дека четириаголникот $CBLK$ е тетивен, а како $\measuredangle ILD=\measuredangle DKI=90^\circ$ заклучуваме дека и четириаолникот $ILDK$ е тетивен (дијаметрите на кружниците опишани околу четириаголниците $CBLK$ и $ILDK$ се отсечките BC и ID, соодветно). Од синусната теорема за $\triangle LDK$ следува

$$\overline{KL}=\overline{ID}\sin\measuredangle LDK=\overline{ID}\cos\measuredangle LCK.$$

Слично, од $\triangle CLK$ следува $\overline{LK}=a\sin\measuredangle LCK$, па затоа $\overline{ID}=a\,\mathrm{tg}\measuredangle LCK$. Од $\triangle CBK$ добиваме $\measuredangle ICK=90^\circ-\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}$, т.е. $\measuredangle LCK=\frac{\alpha}{2}$, што значи дека $\overline{ID}=a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Исто така, имаме дека

$$r=\overline{AQ}\,\mathrm{tg}\tfrac{\alpha}{2}=\tfrac{b+c-a}{2}\,\mathrm{tg}\tfrac{\alpha}{2}.$$

Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID}=r$, што значи ако и само ако $a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c-a}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, т.е. ако и само ако $b+c=3a$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ќе ги користиме истите ознаки како и при првиот начин на решавање, при што се s ќе го означиме полупериметарот на $\triangle ABC$. Слично како во првиот начин на решавање докажуваме $\measuredangle IKC=\measuredangle ILB=90^\circ$, како и тоа дека четириаголникот $DKIL$ е тетивен. Нека вписаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката R. Да забележиме дека I е ортоцентар на $\triangle CBD$, па затоа $DI\perp BC$, т.е. точките D,I,R се колинеарни. Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID}=r$, т.е. $\overline{RD}=2r$. Од

$$\measuredangle KDI=\measuredangle KLI=\measuredangle KBC=\measuredangle IBR$$

следува дека правоаголните триаголници CRD и IRB се слични, па затоа

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RD}}=\frac{\overline{IR}}{\overline{BR}},$$

т.е.

$$\overline{DR}\cdot r=\overline{DR}\cdot\overline{IR}=\overline{BR}\cdot\overline{CR}=(s-b)(s-c),$$

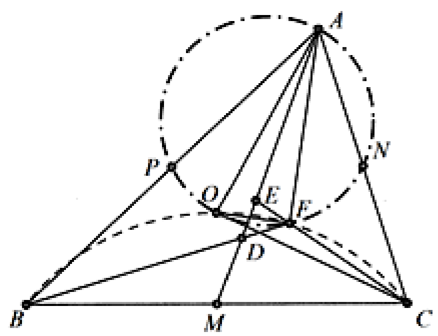
па затоа $\overline{RD}=2r$ ако и само ако

$$(s-b)(s-c)=2r^2=\frac{2P^2}{s^2}=\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{s},$$

односно ако и само ако $b+c=3a$, што и требаше да се докаже.

5. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со средини на страните BC, CA и AB соодветно M, N и P. Нека симетралите на AB и AC ја сечат полуправата AM соодветно во точките D и E, а правите BD и CE се сечат во точката F, која е внатрешна за $\triangle ABC$. Докажи дека точките A, N, F и P се конциклични.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ќе докажеме дека $\measuredangle AFO=90^\circ$, од каде заради $\measuredangle APO=\measuredangle ANO=90^\circ$ следува дека точките A, O, N, F и P лежат на кружница со дијаметар AO.



Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AB}>\overline{AC}$, при што ја добиваме конфигурацијата прикажана на цртежот десно. Триаголниците ADB и AEC се рамнокраки со $\overline{AD}=\overline{BD}$ и $\overline{AE}=\overline{CE}$, соодветно. Да означиме

$$\measuredangle ABD=\measuredangle BAD=x \text{ и } \measuredangle CAE=\measuredangle ACE=y, \text{ т.е. } x+y=\measuredangle BAC.$$

Од синусната теорена за $\triangle ABF$ и $\triangle ACM$ добиваме соодветно

$$\frac{\overline{BM}}{\sin x}=\frac{\overline{AB}}{\sin\measuredangle BMA} \text{ и } \frac{\overline{CM}}{\sin y}=\frac{\overline{AC}}{\sin\measuredangle CMA}.$$

Ако ги поделиме овие равенства и искористиме дека $\sin\measuredangle BMA=\sin\measuredangle CMA$, добиваме $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Од синусната теорема за $\triangle ABF$ и $\triangle ACF$ добиваме соодветно

$$\frac{\overline{AF}}{\sin x}=\frac{\overline{AB}}{\sin\measuredangle AFB} \text{ и } \frac{\overline{AF}}{\sin y}=\frac{\overline{AC}}{\sin\measuredangle AFC}.$$

Оттука $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\overline{AC}\sin\measuredangle AFB}{\overline{AB}\sin\measuredangle AFC}$ и затоа $\sin\measuredangle AFB=\sin\measuredangle AFC$.

Бидејќи $\measuredangle ADF$ е надворешен за за $\triangle ADB$ имаме $\measuredangle EDF=2x$ и аналогно $\measuredangle DEF=2y$. Според тоа,

$$\measuredangle EDF = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2\measuredangle BAC .$$

Тогаш $\measuredangle BFC = 2\measuredangle BAC = \measuredangle BOC$ и четириаголникот $BOFC$ е тетивен. Освен тоа,

$$\measuredangle AFB + \measuredangle AFC = 360^\circ - 2\measuredangle BAC > 180^\circ$$

и значи $\measuredangle AFB = \measuredangle AFC = 180^\circ - \measuredangle BAC$. Тогаш од тетивниот четриаголник $BOFC$ и рамнокракиот $\triangle BOC$ имаме $\measuredangle OFB = \measuredangle OCB = 90^\circ - \measuredangle BAC$. Според тоа,

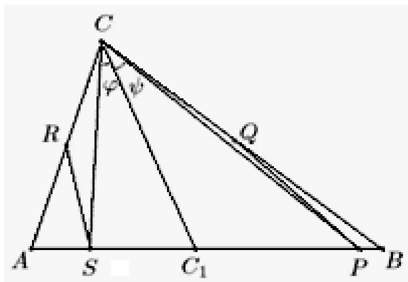
$$\measuredangle AFO = \measuredangle AFB - \measuredangle OFB = (180^\circ - \measuredangle BAC) - (90^\circ - \measuredangle BAC) = 90^\circ .$$

6. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CC_1 на $\measuredangle ACB, C_1 \in AB$. Точките $P \in C_1B,\ Q \in BC, R \in AC$ и $S \in AC_1$ се такви што

$$\overline{C_1P} = \overline{PQ} = \overline{QC} \text{ и } \overline{CR} = \overline{RS} = \overline{SC_1} .$$

Докажи дека CC_1 е симетрала на $\measuredangle SCP$.

Решение. Да означиме $\measuredangle SCC_1 = \varphi, \measuredangle PCC_1 = \psi$ и $\measuredangle PC_1C = \delta$. Од $\triangle PQC$ имаме $\cos(\frac{\gamma}{2} - \psi) = \frac{\overline{CP}}{2\overline{CQ}}$, а од синусната теорема за $\triangle PC_1C$ добиваме



$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PC_1}} = \frac{\sin\delta}{\sin\psi} .$$

Бидејќи $\overline{C_1P} = \overline{PQ} = \overline{QC}$, од горните равенства добиваме $\cos(\frac{\gamma}{2} - \psi)\sin\psi = \frac{\sin\delta}{2}$. Аналогно, од $\triangle SCR$ и $\triangle SC_1C$ добиваме дека важи $\cos(\frac{\gamma}{2} - \varphi)\sin\varphi = \frac{\sin\delta}{2}$. Според тоа,

$$\cos(\tfrac{\gamma}{2} - \varphi)\sin\varphi = \cos(\tfrac{\gamma}{2} - \psi)\sin\psi ,$$

па затоа $\sin\frac{\gamma}{2} + \sin(2\varphi - \frac{\gamma}{2}) = \sin\frac{\gamma}{2} + \sin(2\psi - \frac{\gamma}{2})$, т.е. $2\varphi + 2\psi - \gamma = 180^\circ$ или $\varphi = \psi$. Бидејќи $\gamma > \varphi + \psi$, добиваме $2\varphi + 2\psi - \gamma < \gamma < 180^\circ$, т.е. првото равенство не е можно. Значи, $\varphi = \psi$, што значи дека CC_1 е симетрала на $\measuredangle SCP$.

7. Во $\triangle ABC$ е впишан петаголник $AMNPQ$ со еднакви должини на страни, при што $M \in AB$, $Q \in AC$ и $N, P \in BC$. Правите MN и PQ се сечат во точката S, а со l ја означуваме симетралата на $\measuredangle MSQ$. Докажи дека $OI \parallel l$, каде O и I се соодветно центрите на опишаната и вишаната кружница во $\triangle ABC$.

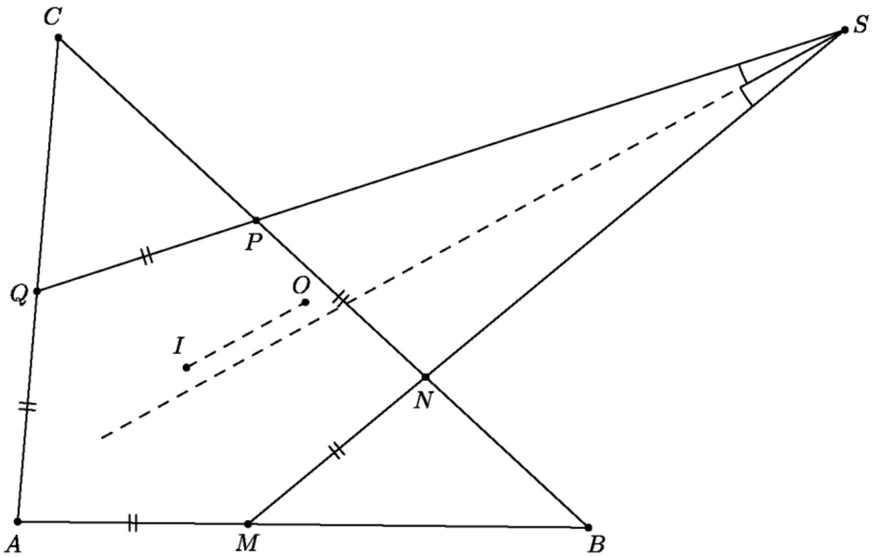
Решение. Со $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ да ги означиме соодветно $\measuredangle BAC, \measuredangle ABC, \measuredangle ACB,$ $\measuredangle MNB$ и $\measuredangle CPQ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека должината на страната на $AMNPQ$ е еднаква на 1. Го разгледуваме случајот во кој $\overline{AB}<\overline{BC}$.

Тогаш

$$\overline{BN}=(c-1)\cos\beta+\cos\delta \text{ и } \overline{CP}=(b-1)\cos\gamma+\cos\varepsilon.$$

Но, $a=1+\overline{BN}+\overline{CP}$, што е еквивалентно $\cos\delta+\cos\varepsilon=\cos\beta+\cos\gamma-1$. Од синусната теорема за $\triangle BNM$ следува $\frac{c-1}{\sin\delta}=\frac{1}{\sin\beta}$, а од истата теорема за $\triangle CPQ$ добиваме $\frac{b-1}{\sin\varepsilon}=\frac{1}{\sin\gamma}$. Од последните две равенства го добиваме равенството $\sin\varepsilon-\sin\delta=\sin\beta-\sin\gamma$. Според тоа,

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon-\delta}{2}=\frac{\sin\varepsilon-\sin\delta}{\cos\varepsilon+\cos\delta}=\frac{\sin\beta-\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma-1}.$$



Понатаму, l зафаќа агол од $90^\circ-\frac{\varepsilon-\delta}{2}$ со правата BC. Нека φ е остриот агол меѓу правите IO и BC. Тогаш $\operatorname{tg}\varphi=\frac{r-R\cos\alpha}{\frac{1}{2}(b-c)}$.

Ќе докажеме дека $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon-\delta}{2}$, од каде ќе следува дека $OI\parallel l$. Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{r-R\cos\alpha}{\frac{1}{2}(b-c)}=\frac{\cos\beta+\cos\gamma-1}{\sin\beta-\sin\gamma}.$$

Имаме, $b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$ и последното равенство се сведува на $\frac{r}{R}+1=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$. Конечно, ако ја искористиме добро познатата формула $r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ со соодветни трансформации добиваме дека е точно претходното равенство.

8. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\measuredangle ACB=45^\circ$, $\overline{AB}=\sqrt{2}$ и $\overline{BM}=m$, каде M е средината на AC.

а) Ако $\alpha=\measuredangle BAC$, изрази го m како функција од $\operatorname{ctg}\alpha$.

б) Определи ги сите вредности на m, за кои $\measuredangle BAC$ е еднозначно определен.

Решение. Ќе ги бараме оние вредности на m за кои $\alpha\in(0,135^\circ)$ е еднозначно определен.

а) Од синусната теорема следува $\overline{BC}=2\sin\alpha$, а $\overline{AC}=2\sin(45^\circ+\alpha)$. Сега, од формулата за дожината на медијаната наоѓаме

$$m^2=\overline{BM}^2=\frac{2\overline{AB}^2+2\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{4}=1+2\sin^2\alpha-\sin^2(45^\circ+\alpha).$$

Ако ставиме $\operatorname{ctg}\alpha=t$, тогаш $t\in(-1,+\infty)$ и од идентитетите

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+t^2} \text{ и } \sin(45^\circ+\alpha)=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}=\frac{(t+1)^2}{2(t^2+1)},$$

по замената и средувањето на изразот добиваме

$$m=\sqrt{\frac{t^2-2t+5}{2(t^2+1)}}.$$

б) Изразот по а) е еквивалентен на изразот

$$(1-2m^2)t^2-2t+5-2m^2=0.$$

Нека $f(t)=(1-2m^2)t^2-2t+5-2m^2$. Бројот на различните агли $\measuredangle BAC$ соодветствува на бројот на решенијата на равенката $f(t)=0$ во интервалот $t\in(-1,+\infty)$. Така, задачата се сведува на наоѓање на вредностите на параметарот m за кои равенката $f(t)=0$ има единствено решение $t\in(-1,+\infty)$. Ако функцијата е линеарна, тогаш $1-2m^2=0$, па $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и единствено решение е $t=2>-1$. Ако

$$D=1-(5-2m^2)(1-2m^2)=0,$$

тогаш $m^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, па $m=\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$, при што и во двата случаи двојниот корен на равенката е во саканиот интервал. Ако пак $D>0$, тогаш потребно и доволно е да биде исполнето

$$(1-2m^2)f(-1)\le 0, \text{ т.е. } (8-2m^2)(1-2m^2)\le 0,$$

од каде добиваме $m\in[\frac{\sqrt{2}}{2},2]$. Конечно, аголот $\measuredangle BAC$ е еднозначно определен ако и само ако $m \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 2] \cup \{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\}$.

9. Нека O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$, а M и N се средините на страните AB и BC. Правата CO ја полови отсечката M. Определи ја најмалата можна вредност на $\measuredangle BAC$.

Решение. Ако $K = CO \cap MN$, тогаш

$$\frac{\overline{MK}}{\sin\measuredangle MOK} = \frac{\overline{MO}}{\sin\measuredangle MKO} = \frac{\overline{NK}}{\sin\measuredangle NOK} = \frac{\overline{NO}}{\sin\measuredangle NKO}$$

и затоа

$$1 = \frac{\overline{MK}}{\overline{NK}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{NO}} \cdot \frac{\sin\measuredangle MOK}{\sin\measuredangle NOK} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta-\gamma)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Бидејќи $\alpha > \beta$ и $\gamma < 90^\circ$, добиваме $\alpha > 45^\circ$. Ако $\alpha < 75^\circ$, следува дека $\sin 2\beta = 2\sin 2\alpha > 1$, што е противречност. Значи, $\alpha \ge 75^\circ$. За $\alpha = 75^\circ$ добиваме $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$. Лесно се проверува дека триаголникот со овие агли ги задоволува условите на задачата.

10. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ во кој $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD < 180^\circ$. Правите AB и CD се сечат во точката E. Докажи дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ ако и само ако е исполнето равенството

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} - \overline{AB} \cdot \overline{AE}.$$

Решение. Ставаме $\measuredangle ABC = \beta, \measuredangle ADC = \delta, \measuredangle BAC = \varphi$ и $\measuredangle CAD = \psi$ (види цртеж). Од условот на задачата следува дека точката A е меѓу точките E и B и точката D е меѓу точките E и C. Освен тоа,

$$\measuredangle AEC = 180^\circ - (\beta + \measuredangle ECB) = 180^\circ - \beta - (360^\circ - \beta - \varphi - \psi - \delta) = \varphi + \psi + \delta - 180^\circ.$$

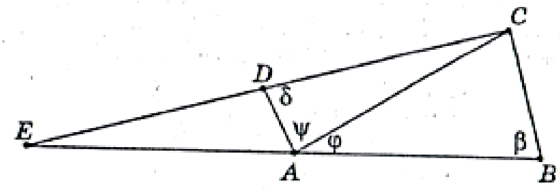
Ако последователно ја примениме синусната теорема на триаголниците ACD, ACE, ABC и повторно на ACE добиваме

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\psi}{\sin\delta},\\
\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\measuredangle EAC}{\sin\measuredangle AEC} = \frac{\sin(180^\circ-\varphi)}{\sin(\varphi+\psi+\delta-180^\circ)} = -\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi+\delta)},\\
\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta},\\
\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\measuredangle ACE}{\sin\measuredangle AEC} = -\frac{\sin(\psi+\delta)}{\sin(\varphi+\psi+\delta)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Оттука, ако ги искористиме (1) добиваме дека равенството

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} - \overline{AB} \cdot \overline{AE}$$

последователно е еквивалентно на равенствата



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}-1=0$$

$$-\frac{\sin\psi}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi+\delta)}+\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\psi+\delta)}{\sin(\varphi+\psi+\delta)}-1=0,$$

$$\sin(\beta+\varphi)\sin(\psi+\delta)\sin\delta-\sin\psi\sin\varphi\sin\beta-\sin\delta\sin\beta\sin(\varphi+\psi+\delta)=0.$$

Ако прво ги искористиме тригонометриските формули за производ на синуси, потоа тригонометриските формули за разлика на косинуси, па за разлика на синуси и на крајот за разлика на косинуси, добиваме дека последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\sin(\beta-\delta)\sin(\psi+\delta)\sin\varphi=0\,.$$

Јасно, $\sin\varphi\neq 0$ и $\sin(\psi+\delta)\neq 0$, па затоа последното равенство е еквивалелнтно со равенството $\sin(\beta-\delta)=0$, т.е. со равенството $\beta=\delta$.

11. Даден е $\triangle ABC$ со симетрали на агли BM и CN ($M\in AC$, $N\in AB$). Полуправата MN ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{BD}}=\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{CD}}\,.$$

Решение. Нека A_1, B_1 и C_1 се соодветно ортогоналните проекции на D врз правите BC, CA и AB (направи цртеж). Од $\triangle DAB_1$ и синусната теорема следува

$$\overline{DB_1}=\overline{DA}\sin\measuredangle DAB_1=\overline{DA}\sin\measuredangle DAC=\frac{\overline{DA}\cdot\overline{DC}}{2R}\,,$$

(R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$). Аналогно,

$$\overline{DA_1}=\frac{\overline{DB}\cdot\overline{DC}}{2R}\ \text{ и }\ \overline{DC_1}=\frac{\overline{DA}\cdot\overline{DB}}{2R}\,.$$

Равенството кое треба да го докажеме е еквивалентно на равенството

$$\overline{AD}\cdot\overline{CD}=\overline{BD}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BD}\,,$$

т.е. треба да докажеме дека

$$\overline{DB_1}=\overline{DA_1}+\overline{DC_1}\,. \qquad (1)$$

Со m да го означиме растојанието од M до AB и BC, а со n растојанието од N до AC и BC. Нека $\frac{\overline{DM}}{\overline{MN}}=x$ ($x>1$). Тогаш

$$\frac{\overline{DB_1}}{n}=x,\ \frac{\overline{DC_1}}{m}=x-1\ \text{ и }\ \frac{\overline{DA_1}-m}{n-m}=x\,.$$

Оттука

$$\overline{DB_1}=nx, \overline{DC_1}=m(x-1) \text{ и } \overline{DA_1}=nx-m(x-1)=\overline{DB_1}-\overline{DC_1},$$

со е докажано равенството (1).

12. Кружница низ темето C на $\triangle ABC$ ја допира страната AB во точката R и ги сече страните AC и BC соодветно во точките P и Q така што

$$\overline{AR}\cdot\overline{BR}=\overline{CR}^2 \text{ и } \overline{AP}\cdot\overline{BQ}=\overline{CP}\cdot\overline{CQ}.$$

Докажи дека CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

Решение. Ставаме $\measuredangle BAC=\alpha, \measuredangle ABC=\beta, \measuredangle ACR=\varphi$ и $\measuredangle BCR=\psi$. Тогаш $\measuredangle ARP=\varphi$ и $\measuredangle BRD=\psi$. Од синусната теорема следува дека $\frac{\overline{AP}}{\overline{RP}}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ и $\frac{\overline{CP}}{\overline{RP}}=\frac{\sin(\alpha+2\varphi)}{\sin\varphi}$, па затоа $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha+2\varphi)}$. Аналогно, $\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}=\frac{\sin^2\psi}{\sin\beta\sin(\beta+2\psi)}$.

Затоа

$$\overline{AP}\cdot\overline{BQ}=\overline{CP}\cdot\overline{CQ} \Leftrightarrow \sin^2\varphi\sin^2\psi=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+2\varphi)\sin(\beta+2\psi).$$

На сличен начин следува дека

$$\overline{AR}\cdot\overline{BR}=\overline{CR}^2 \Leftrightarrow \sin\varphi\sin\psi=\sin\alpha\sin\beta.$$

Значи,

$$\sin\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+2\varphi)\sin(\beta+2\psi),$$

т.е.

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi)-\cos(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi).$$

Бидејќи $(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi)=360^\circ$, важи

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi),$$

т.е.

$$\sin(\alpha-\beta+\varphi-\psi)\sin(\varphi-\psi)=0.$$

Според тоа, $\alpha+\varphi=\beta+\psi=90^\circ$ или $\varphi=\psi$, т.е. CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

13. Во остроаголен разностран $\triangle ABC$ се повлечени тежишната линија AM и висината AH. На правите AB и AC се избрани точките Q и P соодветно при што $QM\perp AC$ и $PM\perp AB$. Опишаната кружница околу $\triangle PMQ$ по втор пата ја сече правата BC во точката X. Докажи дека $\overline{BH}=\overline{CX}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека $PM\cap AB =Z$, $QM\cap AC=Y$ и опишаната кружница ω околу $\triangle PMQ$ по втор пат ја сече правата AB во точката T (направи цртеж).

Имаме, $\measuredangle PMQ=180^\circ-\alpha$ и како четириаголникот $MQTP$ е тетивен добиваме $\measuredangle ATP=\alpha=\measuredangle PAT$. Оттука $\overline{PT}=\overline{PA}$ и $\overline{AT}=2\overline{AZ}$. Според тоа,

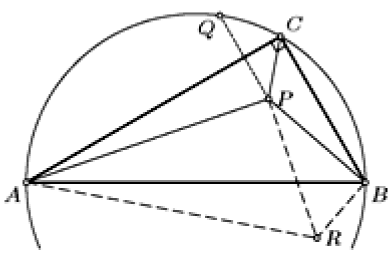
$$\overline{BT} = \overline{AT} - \overline{AB} = 2\overline{AZ} - \overline{AB} = \overline{AB} - 2\overline{BZ} = c - a\cos\beta .$$

Од друга страна, од синусната теорема за $\triangle BQM$, во кој $\measuredangle BQM = 90^\circ - \alpha$ и $\measuredangle BMQ = 90^\circ - \gamma$, добиваме $\overline{BQ} = \frac{\overline{BM}\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

Понааму,од степенот на точката B во однос на кружницата ω добиваме $\overline{BX}\cdot\overline{BM} = \overline{BQ}\cdot\overline{BT}$, па затоа $\overline{BX} = \frac{\cos\gamma(c-a\cos\beta)}{\cos\alpha}$. Бидејќи $\overline{CH} = b\cos\gamma$ и $\overline{BH} = \overline{CX}$ ако и само ако $\overline{BX} = \overline{CH}$, бараното равенство е еквивалентно со равенството $b\cos\alpha + a\cos\beta = c$. Последното равенство следува од косинусната теоирема, т.е. од равенствата

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \text{ и } \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} .$$

14. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB = 90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP} = 4, \overline{BP} = 2$ и $\overline{CP} = 1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.



Решение. Да означиме $\alpha = \measuredangle BAC$. Нека R е точка таква што триаголниците ARB и APC се слични и еднакво ориентирани (цртеж десно). Од $\frac{\overline{AR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ и $\measuredangle RAP = \measuredangle BAC$ следува $\triangle ARP \sim \triangle ABC$. Според тоа,

$$\overline{BR} = \overline{CP}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\overline{RP} = \overline{AP}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 4\operatorname{tg}\alpha \text{ и}$$

$$\measuredangle BRP = \measuredangle ARB - \measuredangle ARP = \measuredangle AQC - \measuredangle ABC = 2\alpha .$$

Сега од косинусната теорема за $\triangle BPR$ следува

$$4 = \overline{BP}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{RP}^2 - 2\overline{BR}\cdot\overline{RP}\cos 2\alpha = \frac{1+16\sin^2\alpha - 8\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

па затоа $16x^3 + 20x^2 - 8x - 3 = 0$, каде $x = \sin\alpha$. Решенијата на последната равенка се $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$, при што само $x = \frac{1}{2}$ има смисла. Значи, $\alpha = 30^\circ$ и аглите на триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

15. Даден е остроаголен $\triangle PBC, \overline{PB} \neq \overline{PC}$. Точките A и D припаѓаат соодветно на страните PB и PC, а точките M и N се соодветно средините на отсеч-

ките BC и AD. Правите AC и BD се сечат во точката O, и од точката O се повлечени нормали $OE \perp AB, E \in AB$ и $OF \perp CD, F \in CD$.

а) Докажи дека, ако точките A, B, C, D се конциклични, тогаш

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}.$$

б) Дали од

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM},$$

следува дека точките A, B, C, D се конциклични?

Решение. а) Со Q и R да ги означиме средините на OB и OC (направи цртеж). Лесно се гледа дека $\overline{EQ} = \frac{\overline{OB}}{2} = \overline{RM}$ и аналогно $\overline{MQ} = \overline{RF}$. Освен тоа,

$$\measuredangle EQM = \measuredangle EQO + \measuredangle OQM = 2\measuredangle EBO + \measuredangle OQM$$

и аналогно

$$\measuredangle MRF = 2\measuredangle FCO + \measuredangle ORM.$$

Од условот следува

$$\measuredangle EBO = \measuredangle FCO = \frac{AD}{2} \text{ и } \measuredangle OQM = \measuredangle ORM$$

(четириаголникот $MROQ$ е паралелограм). Затоа $\measuredangle EQM = \measuredangle MRF$, па како $\overline{EQ} = \overline{RM}$ и $\overline{MQ} = \overline{RF}$ добиваме $\triangle EQM \cong \triangle MRF$. Според тоа, $\overline{EM} = \overline{FM}$. Аналогно се докажува дека $\overline{EN} = \overline{FN}$ и затоа важи

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}.$$

б) Да означиме $\overline{OA} = 2a, \overline{OB} = 2b, \overline{OC} = 2c, \overline{OD} = 2d$, $\measuredangle OAB = \alpha$, $\measuredangle OBA = \beta$, $\measuredangle ODC = \gamma$ и $\measuredangle OCD = \delta$. Имаме

$$\cos\measuredangle EQM = \cos(\measuredangle EQO + \measuredangle OQM) = \cos(2\beta + \measuredangle AOB) = -\cos(\alpha - \beta).$$

Тогаш од косинусната теорема за $\triangle EQM$ добиваме

$$\overline{EM}^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha - \beta).$$

Оттука и од аналогните изрази за $\overline{EN}^2$, $\overline{FN}^2$ и $\overline{FM}^2$, добиваме дека равенството $\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}$ е еквивалентно со равенството

$$(a^2 + d^2 + 2ad\cos(\gamma - \delta))(b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha - \beta)) =$$
$$(a^2 + d^2 + 2ad\cos(\alpha - \beta))(b^2 + c^2 + 2bc\cos(\gamma - \delta))$$

т.е. со равенството

$$(ab - cd)(ac - bd)(\cos(\gamma - \delta) - \cos(\alpha - \beta)) = 0.$$

Бидејќи $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, од равенството $\cos(\gamma - \delta) - \cos(\alpha - \beta) = 0$ следува дека се можни два случаја: кога $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$ (тоа значи дека точките A, B, C, D се конциклични) и кога $\alpha = \delta$ и $\beta = \gamma$ (тоа значи $AB \| CD$, што не е можно).

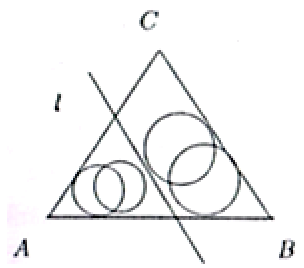
Равенството $ac-bd=0$ значи дека точките A,B,C,D се конциклични, а од равенството $ab-cd=0$ следува $AD\|BC$.

Од претходните разгледувања следува, дека кога $AD\|BC$ добиваме

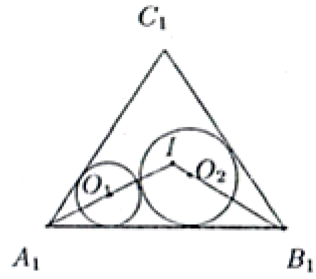
$$\overline{EM}\cdot\overline{FN}=\overline{EN}\cdot\overline{FM},$$

но притоа не е можно точките A,B,C,D да се концклични, бидејќи тогаш $\overline{PB}=\overline{PC}$. Според тоа, од равенството $\overline{EM}\cdot\overline{FN}=\overline{EN}\cdot\overline{FM}$ не следува дека точките A,B,C,D се конциклични.

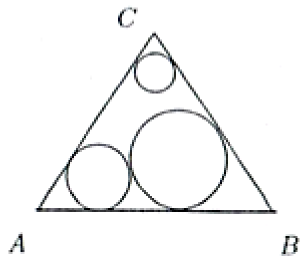
16. Определи ја должината на страната на најмалиот рамностран триаголник во кој може да се поставaт три кружници со радиуси 2, 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки.



Решение. Нека во рамностран $\triangle ABC$ се поставени две кружници со радиуси 3 и 4, кои немаат заеднички внатрешни точки. Јасно, постои права l која ги разделува, т.е. кружниците лежат во различлни полурамнини во однос на l (цртеж долу лево). Оваа права го дели триаголникот на триаголник и четириаголник или на два триаголника. И во двата случаја секоја од кружниците може да се премести во фигурата која ја содржи така што кружницата ќе се допре до две страни на $\triangle ABC$. Јасно, новите две кружници немаат заеднички внатрешни точки. Нека овие кружници се впишани соодветно во $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$.



Ја преместуваме страната BC паралелно на самата себе кон темето A, додека кружницата впишана во $\measuredangle B$ не се допре до кружницата впишана во $\measuredangle A$ (цртеж десно). Добиваме рамностран $\triangle A_1B_1C_1$ со помала страна, во кој се поставени две кружници со радиуси 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки. Нека $\overline{A_1B_1}=x$, I е центар на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$, а O_1 и O_2 се центрите на двете кружници. Тогаш $\overline{A_1I}=\overline{B_1I}=\frac{x}{\sqrt{3}}, \overline{A_1O_1}=6, \overline{B_1O_2}=8$. Бидејќи кружницата со радиус 4 се содржи во $\triangle A_1B_1C_1$, добиваме $O_2\in IB_1$. Затоа $\overline{B_1O_2}<\overline{IB_1}$, т.е. $x\geq 8\sqrt{3}$. Од друга страна $\overline{O_1I}=\frac{x}{\sqrt{3}}-6, \overline{O_2I}=\frac{x}{\sqrt{3}}-8, \overline{O_1O_2}=7$ и од косинусната теорема за $\triangle O_1O_2I$ следува $(\frac{x}{\sqrt{3}}-6)^2+(\frac{x}{\sqrt{3}}-8)^2+(\frac{x}{\sqrt{3}}-6)(\frac{x}{\sqrt{3}}-8)=49$. Бидејќи $x\geq 8\sqrt{3}$, од последната равенка добиваме $x=11\sqrt{3}$. Според тоа, $\overline{AB}\geq 11\sqrt{3}$. Од друга страна во рамностран $\triangle ABC$ со страна $11\sqrt{3}$ може да се постават три кружници со радиуси 2, 3 и 4 (без заеднички внатрешни точки) ако кружниците ги впишеме во трите агли на триаголникот (цртеж десно).



Литература

1. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К. (2003). *Математика* 3, (авторизирани предавања), Математички талент, Скопје
2. Андров, И. К.; Окунев, А. К.: *Курс тригонометрии*, Просвещение, Москва, 1967
3. Бандиќ, И. М.; Илиќ-Дајовиќ, М.: *Математика за* III *клас гимназија*, Просветно дело, Скопје, 1970