Ратко Тошић, Нови Сад

О ЕКОНОМИЧНОСТИ ГЕОМЕТРИЈСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

Геометријске конструкције подразумевају употребу шестара и лењира. Ако се дозвољава употреба других средстава или ако се постављају нека ограничења у погледу употребе шестара и лењира, то се у формулацији задатка посебно наглашава. Шестар служи за цртање кружница, а лењир за цртање правих. То су елементарни кораци при извођењу геометријских конструкција. Сложеност конструкције меримо бројем елементарних корака.

Обично се тражени геометријски објект може конструисати на више различитих начина. Наравно, бољим ћемо сматрати онај поступак који захтева мањи број елементарних корака при конструкцији.

У школи се уче типичне конструкције разних геометријских објеката, али оне нису увек најекономичније. У овом чланку указујемо на неколико примера геометријских конструкција које се изводе са мање елементарних корака.

Конструкција нормале из дате тачке A на дату праву a

Тачка A може бити ван праве a или на правој a. Размотрићемо сваки од ова два случаја посебно.

а) *Тачка А не припада правој а*

Уобичајена конструкција (разбијена на елементарне кораке) је следећа (слика 1):

1. Конструкција кружнице $k_1 = k(A, r)$, при чему је полупречник r већи од растојања између тачке A и праве a.

Нека су B и C тачке пресека те кружнице са правом a.

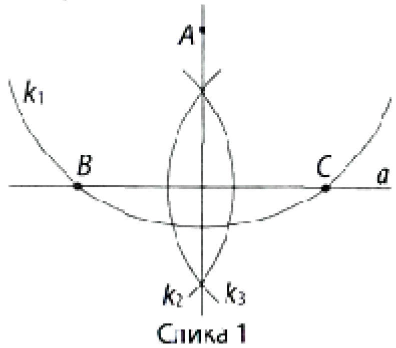
2. Конструкција кружнице $k_2 = k(B, r_1)$, при чему је $r_1 > \frac{1}{2}BC$.

3. Конструкција кружнице $k_3 = k(C, r_1)$.

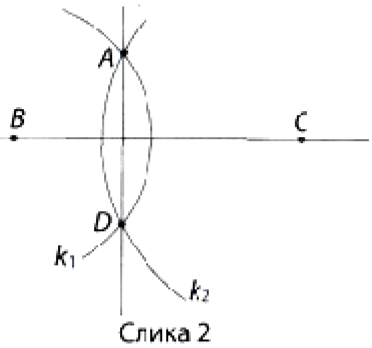
(Кружнице k_2 и k_3 имају једнаке пречнике.)

У пракси је најбоље узети $r_1 = r$, јер ће се тада кружнице k_2 и k_3 сигурно сећи, а једна од тачака пресека је тачка A.

4. Конструкција праве кроз тачку пресека кружнице k_2 и k_3. Та права и јесте тражена нормала.



Слика 1



Слика 2

Видимо да се конструкција састоји из 4 елементарна корака (три употребе шестара и једна употреба лењира). Кажемо да је сложеност конструкције 4.

Показаћемо сада да за решење истог задатка постоји и конструкција сложености 3. Изводимо је на следећи начин (слика 2):

Нека су B и C две различите тачке праве a.

1. Конструкција кружнице $k_1 = k(B, BA)$, где је B произвољна тачка праве a.

2. Конструкција кружнице $k_2 = k(C, CA)$, где је C произвољна тачка праве a, различита од B.

Кружнице k_1 и k_2 поред тачке A имају још једну заједничку тачку. *Означимо је са D.*

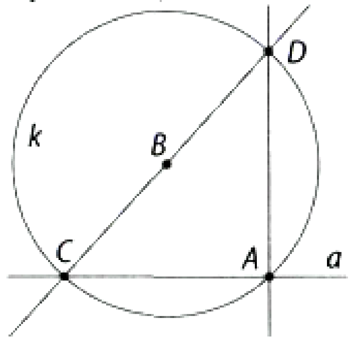
3. Конструкција праве AD. Та права и јесте тражена нормала. Наиме, свака тачака B и C једнако је удаљена од тачака A и D, па је права а симетрала дужи AD.

При конструкцији смо два пута користили шестар и једанпут лењир.

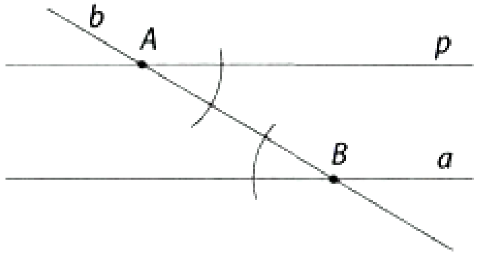
б) *Тачка А припада правој а*

Уобичајена конструкција се не разликује од оне за случај кад тачка *A* не лежи на правој *A*. Полупречник *r* са центром *A*, која се конструише у првом кораку, може бити произвољан.

Показаћемо сада да за решење истог задатка постоји и конструкција сложености 3. Изводимо је на следећи начин (слика 3):



Слика 3



Слика 4

Нека је B произољна тачка ван праве a.

1. Конструкција кружнице $k = k(B, BA)$, где је *B* произвољна тачка ван праве *a*. Означимо са *C* другу тачку пресека кружнице *k* и праве *a*.

2. Конструкција праве *BC*. Нека је *D* друга тачка пресека кружнице *k* и праве *BC*.

3. Конструкција праве *AD*.

Права *AD* и јесте тражена нормала.

Заиста, угао *CAD* је прав, као периферијски угао над пречником *CD* кружнице *k*. При конструкцији смо два пута користили лењир и једанпут шестар.

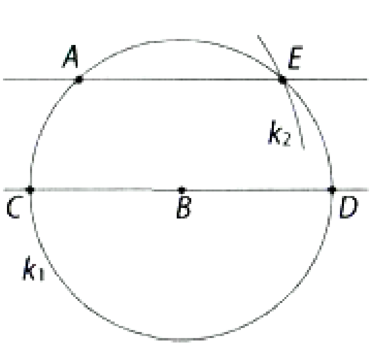
Конструкција праве кроз дату тачку паралелне датој правој

Нека је *a* дата права и *A* дата тачка.

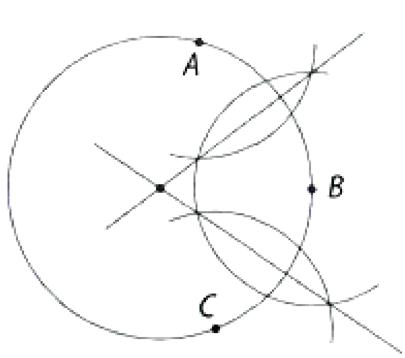
Уобичајна конструкција захтева 5 корака (3 шестара и 2 лењира). Укратко, она изгледа овако (слика 4):

1. Конструкција праве *b* кроз тачку *A* (1 корак). Нека је *B* пресек те праве и праве *a*.

2. Конструкција лукова (кружница) истог полупречника са центрима *A* и *B* (2 корака).



Слика 5



Слика 6

3. Преношење угла aBb, тј. конструкција угла pAb подударног углу aBb (2 корака).

Следећа конструкција састоји се из 3 корака (2 шестара и 1 лењир).

1. Конструкција кружнице $k_1 = k(B, BA)$ (слика 5), где је B произвољна тачка праве a. Нека су D и C тачке пресека праве a и кружнице k_1.

2. Конструкција кружнице $k_2 = k(C, AD)$. Нека је E тачка пресека кружница k_1 и k_2 која се налази са исте стране праве a са које и тачка A.

3. Конструкција праве AE.

Да је AE тражена права, следи из чињенице да је $AEDC$ једнакокраки трапез чије су основице AE и DC.

Конструкција дужи подударне полупречнику дате кружнице

Ако је дата кружница, али не и њен центар, једноставно се одређује њен центар и конструише полупречник, односно дуж подударна том полупречнику.

У ту сврху обично се конструише симетрала две тетиве, да би се у њиховом пресеку добио центар. После тога се одређује полупречник рецимо као дуж на једној од тих симетрала чији су крајеви центар кружнице и пресек те симетрале са кружницом. За конструкцију симетрале сваке тетиве треба конструисати пар лукова (кружница). Ученици обично цртају и саме тетиве, иако је то непотребно, јер за конструкцију симетрале довољно је да имамо крајње тачке дужи. Конструкција се даље може упростити тако што ћемо узети две тетиве са једном заједничком крајњом тачком, односно три тачке, A, B и C на кружници. Тиме ћемо уштедети једну употребу шестара, јер један исти лук (кружницу) користимо за конструкцију обе симетрале (слика 6).

Дакле, конструкција се изводи са само 5 елементарних корака, при чему три пута користимо шестар (подударне кружнице са центрима A, B и C) и два пута лењир (симетрале дужи AB и BC). Сложеност конструкције је 5.

Изненађујуће је да се та конструкција може још више упростити, тј. могуће је смањити укупан број корака на три и тражени полупречник добити уз само два коришћења шестара и једно коришћење лењира.

У основи конструкције је тврђење које доказујемо у облику решења следећег задатка (Шалов проблем). Задатак су решавали ученици осмог разреда на 46. државном такмичењу из математике.

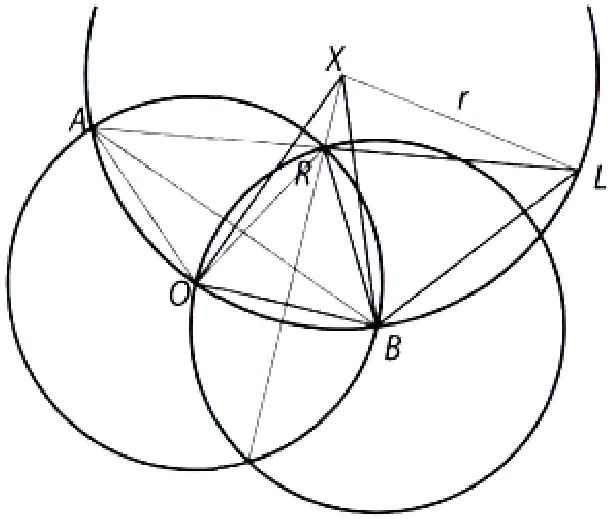
Задатак. Нека је O тачка на кружници k са центром X полупречника r. Кружница c са центром O сече k у тачкама A и B. Нека је R тачка у унутрашњости кружнице k у којој *се секу кружница* c *и кружница* $k(B, BO)$. L *је друга тачка пресека праве* AR и кружнице k. Докажи да је дуж LR једнака полупречницу кружнице k.

Решење. Троугао BOR је једнакостраничан, јер су му све три странице једнаке полупречнику кружнице c (слика 7). Дакле, $\measuredangle ROB = 60°$, па је $\measuredangle RAB = 30°$ (као одговарајући периферијски). Како је $\measuredangle RAB = \measuredangle LAB$, то је $\measuredangle LXB = 60°$ (као одговарајући централни кружнице k). Зато је и троугао XBL једнакостраничан, па је $BL = r$. Лако се доказује да су троуглови RBL и XOB подударни (СУС), одакле следи да је $RL = OX = r$.

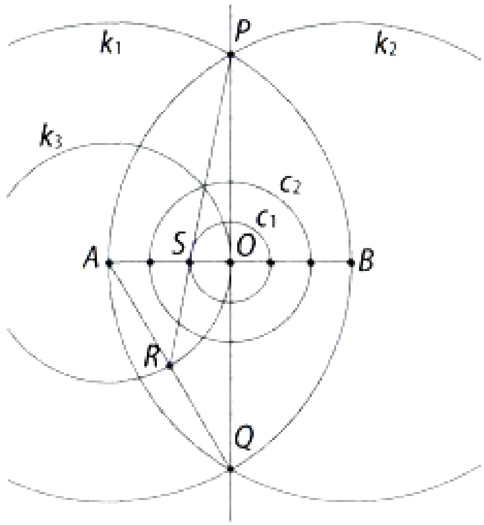
Сада можемо решити одговарајући конструктивни задатак.

Задатак. Дата је кружница k. Конструисати дуж чија је дужина једнака полупречнику кружнице k.

Решење. На основу претходног задатка конструкција се састоји из три корака (слика 7):



Слика 7



Слика 8

1. Конструкција кружнице c са центром у произвољној тачки O кружнице k. Нека су A и B тачке пресека те кружнице са кружницом k.

2. Конструкција кружнице са центром B и полупречником BO. Нека је R она тачка пресека те кружнице са кружницом c која лежи у унутрашњости кружнице k.

3. Конструкција праве кроз тачке A и R. Нека је L друга тачка пресека те праве и кружнице k. Дуж RL је тражена дуж. Њена дужина једнака је полупречнику кружнице k.

Подела дужи на шест подударних делова

Подела дате дужи на n једнаких делова учи се у 7. разреду основне школе. При томе се користи сличност (Талесова теорема). Уобичајени поступак захтева бар $2n + 4$ елементарних корака. (Образложи!) У неким случајевима поступак се може поједноставити. О томе ће бити говора у посебном чланку, а сада ће бити речи само о једном поступку за поделу дате дужи на шест подударних делова. Уз дате коментаре, читалац ће лако извести комплетан доказ конструкције. На слици 8, бројевима је означен редослед конструкције појединих елемената.

Конструкција се састоји из 8 елементарних корака. Дакле, сложеност конструкције је 8, док је сложеност класичног поступка 16. При томе се користи само оно знање које су ученици стекли пре обраде Талесове теореме и сличности.

Конструкција:

Нека је AB дата дуж (слика 8).

1. Конструкција кружнице $k_1(A, AB)$.

2. Конструкција кружнице $k_2(B, AB)$.

Нека су P и Q тачке пресека конструисаних кружница.

3. Конструкција праве PQ. Нека је O пресек правих AB и PQ.

4. Конструкција дужи QA.

У правоуглом троуглу OAQ хипотенуза AQ је два пута већа од катете AO.

5. Конструкција кружнице $k_3(A, AO)$.

Нека је R тачка пресека те кружнице са AQ. Тачка R је средиште дужи AQ.

6. Конструкција дужи PR.

Нека је S тачка пресека дужи PR и AO. Дужи PR и AO су тежишне линије троугла PAQ, а S је тежиште тог троугла. Зато је $SO = \frac{1}{3}AO$.

7. Конструкција кружнице c_1 са центром O и полупречником OS.

8. Конструкција кружнице c_2 са центром O чији је полупречник једнак пречнику кружнице c_1.

Тачка O и пресеци кружница c_1 и c_2 са дужи AB деле ту дуж на шест подударних делова.

Задатак за самосталан рад

Дату дуж AB подели на 4 подударна дела у само 6 елементарних корака.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија