XLVIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Дрвен квадар со рабови 72 *dm*, 96 *dm* и 120 *dm* е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, пришто должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

Решение. Должината на работ на делбените коцки е еднаква на $\mathrm{NZD}(72,96,120) = 24\ dm$. Според тоа, рабовите на квадарот се поделени на $72:24=3, 96:24=4$ и $120:24=5$ делови, што значи дека квадарот е поделен на $3\cdot 4\cdot 5 = 60$ коцки. Конечно, висината на добиениот столб е еднаква на $60\cdot 24 = 1440\ dm = 144\ m$.

2. Колку има трицифрени природни броеви такви што цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на десетките и единиците?

Решение. Трицифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се од видот $\overline{abc}, a \neq 0$ и $a = b + c$.

- **з**а $a = 1$ тоа се броевите: 101, 110,
- за $a = 2$ тоа се броевите: 202, 211, 220,
- за $a = 3$ тоа се броевите: 303, 312, 321, 330,
- за $a = 4$ тоа се броевите: 404, 413, 422, 431, 440,
- за $a = 5$ тоа се броевите: 505, 514, 523, 532, 541, 550,
- за $a = 6$ тоа се броевите: 606, 615, 624, 633, 642, 651, 660,
- за $a = 7$ тоа се броевите: 707, 716, 725, 734, 743, 752, 761, 770,
- за $a = 8$ тоа се броевите: 808, 817, 826, 835, 844, 853, 862, 871, 880,
- за $a = 9$ тоа се броевите: 909, 918, 927, 936, 945, 954, 963, 972, 981, 990.

Конечно, постојат $2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 54$ трицифрени броеви со бараното својство.

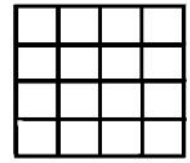
3. Збирот на педесет природни броеви е 8625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот број е за 5 поголем од третиот, ... , педесеттиот број е за 5 поголем од четириесет и деветтиот број. Определи ги најголемиот и најмалиот собирок во дадениот збир.

Решение. Нека x е првиот собирок. Тогаш вториот собирок е $x+5$, третиот е $x+5+5=x+2\cdot 5$, четвртиот е $x+2\cdot 5+5=x+3\cdot 5$, ..., педесеттиот собирок е $x+49\cdot 5$. Според тоа,

$$x+(x+5)+(x+2\cdot 5)+(x+3\cdot 5)+...+(x+49\cdot 5)=8625,$$
$$50x+(5+2\cdot 5+3\cdot 5+...+49\cdot 5)=8625,$$
$$50x+5\cdot(1+2+...+49)=8625,$$
$$10x+1+2+...+49=1725,$$
$$10x+\frac{49\cdot(49+1)}{2}=1725,$$
$$10x+1225=1725,$$
$$10x=500,$$
$$x=50.$$

Значи, најмалиот собирок е 50, а најголемиот собирок е еднаков на $50+49\cdot 5=295$.

4. Квадрат со страна $4\,cm$ е поделен на 16 квадрати со страна $1\,cm$, како на цртежот.



а) Колку квадрати има на цртежот?

б) Пресметај го збирот на периметрите на сите тие квадрати.

Решение. а) На цртежот има 16 квадрати со страна $1\,cm$, 9 квадрати со страна $2\,cm$, 4 квадрати со страна $3\,cm$ и 1 квадрат со страна $4\,cm$. Значи, на цртежот има $16+9+4+1=30$ квадрати.

б) Збирот на периметрите на сите квадрати кои се на дадениот цртеж е еднаков на:

$$16\cdot 4\cdot 1+9\cdot 4\cdot 2+4\cdot 4\cdot 3+1\cdot 4\cdot 4=64+72+48+16=200\,cm.$$

VII одделение

1. Определи ги сите нескратливи дропки $\frac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{N}$, такви што

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=2\frac{71}{80}.$$

Решение. Од условот на здачата следува $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$, од каде добиваме $a^2>b^2$ и како $a,b\in\mathbb{N}$, важи $a>b$. Понатаму, бидејќи дропката $\frac{a}{b}$ е нескратлива имаме $\text{NZD}(a,b)=1$. Сега, од $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=2\frac{71}{80}$ последователно следува

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{231}{80}.$$
$$80(a^2-b^2)=231ab.$$

Но, $\text{NZD}(80,231)=1$, па од последното равенство следува дека a и b се делители на 80. Делители на 80 се: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 и 80 и со непосредна проверка добиваме дека единствено решение на последната равенка е $a=16, b=5$. Според тоа, единствена нескратлива дропка која го задоволува услово на задачата е $\frac{a}{b}=\frac{16}{5}$.

2. Дедо Коста треба да ја изора и посее својата нива со семенски материјал-пченица. Тој нивата ја изорал за 3 дена. Првиот ден изорал 20% од целата нива и уште 16 декари, вториот ден 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, а третиот ден изорал 75% од остатокот од претходниот ден и последните 30 декари. Колку тони семенски материјал-пченица треба да купи дедо Коста, ако за сеење на еден декар е потребно 3,5 *kg* пченица?

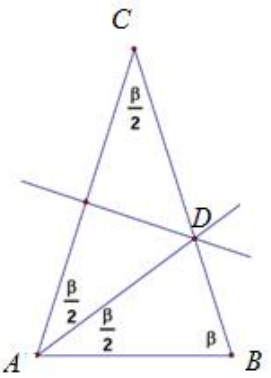
Решение. *Прв начин*. Последните 30 декари се 25% од површината која е изорана третиот ден, што значи дека третиот ден дедо Коста изорал $4\cdot 30=120$ декари, кои останале неизорани по вториот ден. Бидејќи вториот ден дедо Коста изорал 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, добиваме дека по орањето на 30% од остатокот од првиот ден неизорани биле $120+20=140$ декари, што значи дека 70% од остатокот од првиот ден се 140 декари, т.е. остатокот по првиот ден е $\frac{140}{70}\cdot 100=200$ декари. Последното значи дека по орањето на 20% од целата нива останале $200+16=216$ декари и тоа се 80% од целата

нива. Значи, целата нива имала $\frac{216}{80}\cdot 100 = 270$ декари. Конечно, бидејќи за сеење на 1 декар се потребни $3,5\,kg$ пченица, добиваме дека за да ја засее нивата дедо Коста требало да купи $270\cdot 3,5 = 945\,kg$ пченица.

Втор начин. Нека нивата имала x декари. Првиот ден се изорани $0,2x+16$ декари, па неизорани останале $x-(0,2x+16)=0,8x-16$ декари. Вториот ден се изорани $0,3(0,8-16)+20=0,24x+15,2$ декари, па неизорани останале $0,8x-16-(0,24x+15,2)=0,56x-31,2$ декари. Третиот ден се изорани $0,75(0,56x-31,2)+30=0,42x+6,6$ декари, со што е изорана целата нива, па затоа $0,42x+6,6=0,56x-31,2$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $0,14x=37,8$, од каде добиваме $x=270$ декар. Конечно, бидејќи за сеење на 1 декар се потребни $3,5\,kg$ пченица, добиваме дека за да ја засее нивата дедо Коста требало да купи $270\cdot 3,5=945\,kg$ пченица.

3. Во рамнокрак $\triangle ABC$ симетралата на кракот AC и симетралата на $\measuredangle BAC$ се сечат во точка D која припаѓа на кракот BC. Определи ја големината на $\measuredangle CDA$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=$. Понатаму, AD е симетрала на $\measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle BAD=\measuredangle DAC=\frac{}{2}$. Но, точката D припаѓа на симетралата на кракот AC, па затоа $\overline{AD}=\overline{CD}$, т.е. триаголникот CAD е рамнокрак, со основа AC. Значи, $\measuredangle CAD=\measuredangle DAC=\frac{}{2}$. Според тоа, за збирот на аглите на $\triangle ABC$ добиваме



$$+\quad +\frac{}{2}=180^\circ,\ \text{т.е.}\quad =72^\circ.$$

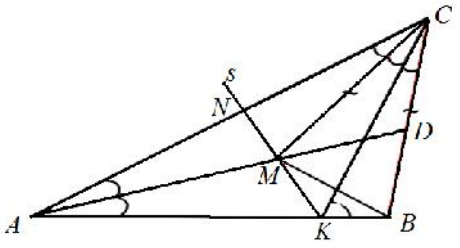
Конечно, од $\triangle CAD$ наоѓаме

$$\measuredangle CDA=180^\circ-2\cdot\frac{}{2}=180^\circ-\quad=180^\circ-72^\circ=108^\circ.$$

4. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC=\frac{7}{2}\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCA=\frac{3}{2}\measuredangle CAB$. Симетралата на страната AC ги сече симетралата AD на $\measuredangle CAB$ и страната AB во точките M и K, соодветно. Докажи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак и

пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$, ако важи $\overline{AM}+\overline{MK}=6\,cm$.

Решение. Од условот на задачата следува



$\measuredangle ABC+\measuredangle BCA+\measuredangle CAB=180^\circ$,

$\frac{7}{2}\measuredangle CAB+\frac{3}{2}\measuredangle CAB+\measuredangle CAB=180^\circ$,

$6\measuredangle CAB=180^\circ$,

$\measuredangle CAB=30^\circ$,

па затоа $\measuredangle BCA=45^\circ$, $\measuredangle ABC=105^\circ$. Понатаму, $M,K\in s$, па затоа важи $\overline{AM}=\overline{CM}$ и $\overline{AK}=\overline{CK}$, т.е. триаголниците ACM и ACK се рамнокраки. Тоа значи дека $\measuredangle KAC=\measuredangle ACK=30^\circ$. Понатаму, бидејќи AM е симетрала на $\measuredangle CAK$, добиваме дека $\measuredangle KAM=\measuredangle MAC=15^\circ$. Но, $\triangle ACM$ е рамнокрак па затоа важи $\measuredangle ACM=\measuredangle CAM=15^\circ$, од што следува дека $\measuredangle MCK=\measuredangle ACK-\measuredangle ACM=15^\circ$ и затоа $\measuredangle KCB=\measuredangle ACK-\measuredangle MCK=15^\circ$. Сега, од $\triangle BCK$ следува

$$\measuredangle BKC=180^\circ-(\measuredangle KBC+\measuredangle BCK)=180^\circ-(105^\circ+15^\circ)=60^\circ,$$

а од правоаголниот $\triangle KCN$ следува

$$\measuredangle MKC=\measuredangle NKC=180^\circ-(\measuredangle KNC+\measuredangle NCK)=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ.$$

Понатаму, од $\measuredangle MKC=\measuredangle BKC=60^\circ$, $\measuredangle MCK=\measuredangle BCK=15^\circ$ и $\overline{KC}=\overline{KC}$ следува дека $\triangle MKC\cong\triangle BKC$. Од докажаната складност следува $\overline{MC}=\overline{BC}$, што значи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак.

Од условот на задачата иимаме $\overline{AM}+\overline{MK}=6\,cm$, па како $\overline{AM}=\overline{CM}$, добиваме $\overline{CM}+\overline{MK}=6\,cm$. Конечно, од $\triangle MKC\cong\triangle BKC$ следува

$$L_{BCMK}=\overline{CM}+\overline{MK}+\overline{KB}+\overline{BC}=2(\overline{CM}+\overline{MK})=12\,cm.$$

VIII одделение

1. Нека a,b,c,d се меѓусебно различни природни броеви такви што $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$. Докажи дека $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ е квадрат на природен број.

Решение. Равенството од условот на задачата последователно е еквивалентно со равенствата

$$(a^2-b^2)(c^2+d^2)=(c^2-d^2)(a^2+b^2),$$
$$a^2c^2+a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2=a^2c^2+b^2c^2-a^2d^2-b^2d^2,$$
$$a^2d^2=b^2c^2.$$

Според тоа,

$$\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}=\sqrt{\frac{(a^2d^2)^3}{2b^2c^2}+\frac{(b^2c^2)^3}{2a^2d^2}}=\sqrt{\frac{(b^2c^2)^3}{2b^2c^2}+\frac{(b^2c^2)^3}{2b^2c^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(b^2c^2)^2}{2}+\frac{(b^2c^2)^2}{2}}=\sqrt{(b^2c^2)^2}=b^2c^2=(bc)^2,$$

што и требаше да се докаже.

2. Збирот на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри земени во обратен редослед, при делење со 5 дава остаток 2. Кој е тој број?

Решение. Нека $\overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Имаме

$$\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=10(a+b)+(a+b).$$

Бидејќи $5\mid 10$, остатокот при делење со 5 на збирот $\overline{ab}+\overline{ba}$ е еднаков на остатокот при делење со 5 на збирот $a+b$. Сега, a и b се ненулти цифри, па затоа $a+b\le 18$ и како остатокот при делење на $a+b$ со 5 треба да е еднаков на 2, можни се следниве случаи:

- $a+b=2$ и како $a,b\neq 0$, добиваме $\overline{ab}\in\{11\}$,
- $a+b=7$ и како $a,b\neq 0$, добиваме $\overline{ab}\in\{16,25,34,43,52,61\}$
- $a+b=12$, па затоа $\overline{ab}\in\{39,48,57,66,75,84,93\}$
- $a+b=17$, па затоа $\overline{ab}\in\{89,98\}$.

Конечно, $\overline{ab}\in\{11,16,25,34,39,43,48,52,57,61,66,75,84,89,93,98\}$.

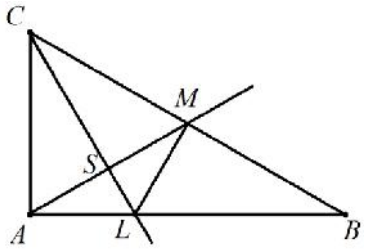
3. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB=3\measuredangle ABC$. Нека L е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB и нека $P_{\triangle ALC}:P_{\triangle LBC}=1:2$,

каде $P_{\triangle ALC}$ и $P_{\triangle LBC}$ се соодветно плоштините на $\triangle ALC$ и $\triangle LBC$. Определи ги големините на аглите на $\triangle ABC$

Решение. За аглите на $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Тогаш $\sim = \measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC = 3$ Нека M е точка на BC таква што $\measuredangle BAM =$. Значи, $\triangle ABM$ е рамнокрак и важи $\overline{MA} = \overline{MB}$. Понатаму,

$\measuredangle MAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAM = 2$ и

$\measuredangle AMC = \measuredangle BAM + \measuredangle ABM = 2$,



што значи $\triangle AMC$ е рамнокрак и важи $\overline{AC} = \overline{MC}$.

Нека S е пресекот на AM и CL. Сега CS е симетрала на $\measuredangle ACB$ и $\triangle AMC$ е рамнокрак со врв C, па затоа CS е висина во овој триаголник, што значи дека CL е симетрала на страната AM во $\triangle AMC$, па затоа и во $\triangle AML$. Тоа значи дека $\triangle AML$ е рамнокрак, односно $\overline{AL} = \overline{ML}$.

Понатаму, $\overline{AC} = \overline{MC}$, $\overline{AL} = \overline{ML}$ и $\overline{CL} = \overline{CL}$, па затоа $\triangle ALC \cong \triangle MLC$, односно $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle MLC}$. Од последното равенство и од условот на задачата следува

$$2P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle LMC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle ALC},$$

т.е. $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBM}$, па затоа $P_{\triangle LBM} = P_{\triangle MLC}$. Но, во триаголниците LBC и LMC висините повлечени од темето L се еднакви, па од последното равенство следува дека соодветните основи се еднакви, т.е. $\overline{MB} = \overline{MC}$. Значи, $\overline{AC} = \overline{MC} = \overline{MB} = \overline{MA}$, т.е. $\triangle AMC$ е рамностран. Според тоа, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACM = \measuredangle MAC = 60^\circ$, па како $\measuredangle MAC = 2$, добиваме $= 30^\circ$ и конечно $\sim = 3 \quad = 90^\circ$.

4. Филип, Кирил и Никола си испраќаат писма меѓу себе при што не добиваат писма од други луѓе. Притоа писмата се испраќаат според следниве правила:

- Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а на Никола секој петти ден,
- Кирил му испраќа писмо на Филип одма по секои две добиени писма, а на Никола секој чртврт ден,
- Никола му испраќа писмо на Филип одма по секои четири добиени писма, а на Кирил секој осми ден.

Секое писмо патува еден ден, т.е. секое писмо стигнува следниот ден од денот кога е испратено. Кој е најмалиот број денови по кои Филип ќе добие 68 писма?

Решение. Со x да го означиме бројот на денови за кои Филип ќе добие 68 писма. Тоа значи дека Кирил и Никола заклучно со $(x-1)$ – от ден на Филип му испратиле 68 писма. Со k и n да го означиме бројот на писмата кои соодветно ги добиле Кирил и Никола заклучно со $(x-1)$ – от ден. Од условите на задачата следува дека заклучно со $(x-1)$ – от ден Кирил до Филип вкупно испратил $\frac{k}{2}$ писма, а Никола до Филип испратил вкупно $\frac{n}{4}$ писма. Според тоа, $\frac{k}{2}+\frac{n}{4}=68$, т.е. $2k+n=272$.

Од друга страна, заклучно со $(x-1)$ – от ден Кирил вкупно добил онолку писма колку што испратиле Филип и Никола заклучно со $(x-2)$ – от ден. Бидејќи, Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а Никола му испраќа писмо на Кирил секој осми ден добиваме дека $k=\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{8}=\frac{5(x-2)}{8}$. Слично бидејќи Филип му испраќа писмо на Никола секој петти ден, а Кирил му испраќа писмо на Никола секој четврт ден, добиваме дека $n=\frac{x-2}{5}+\frac{x-2}{4}=\frac{9(x-2)}{20}$. Сега, ако за k и n замениме во $2k+n=272$, добиваме

$$2\cdot\frac{5(x-2)}{8}+\frac{9(x-2)}{20}=272,$$
$$25(x-2)+9(x-2)=5440,$$
$$34x=5508,$$
$$x=162.$$

Значи, Филип ќе добие 68 писма по најмалку 162 дена.

IX одделение

1. Нека за целите броеви a,b и n важи $b\neq 0$ и $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$. Докажи дека геометриската средина на броевите a и b е цел број.

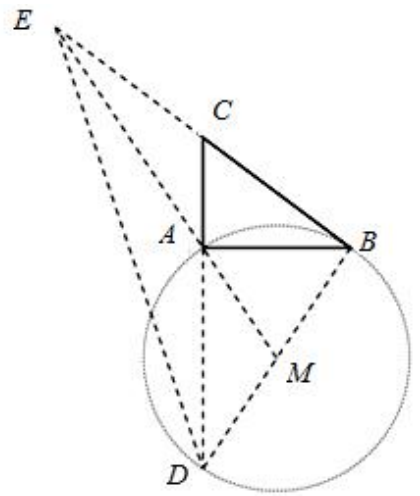
Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$ab^2+an^2=ba^2+bn^2,$$
$$ab^2-a^2b+an^2-bn^2=0,$$
$$ab(b-a)-n^2(ab-n^2)=0,$$
$$(b-a)(ab-n^2)=0.$$

Според тоа, $b-a=0$ или $ab-n^2=0$. Ако $b-a=0$, тогаш $a=b$, па затоа $\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}=|a|$ е цел број, а ако $ab-n^2=0$, тогаш $ab=n^2$, па затоа $\sqrt{ab}=\sqrt{n^2}=|n|$ е цел број, што и требаше да се докаже.

2. Даден е $\triangle ABC$. На правата AC е избрана точка D таква што $\overline{CD}=3\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е избрана точка E, различна од B, таква што $\overline{CE}=\overline{BC}$. Ако $\overline{BD}=\overline{AE}$, докажи дека $\measuredangle BAC=90^\circ$.

Решение. Точката C е средина на BE, па затоа во $\triangle BED$ отсечката DC е тежишна линија и како по услов $\overline{CD}=3\overline{CA}$,заклучувамедека A е тежиште на $\triangle BED$. Нека $M=BD\cap AE$. Тогаш EM е тежишна линија во $\triangle BED$, па затоа M е средина на отсечката BD. Имаме



$$\overline{AM}=\frac{\overline{AE}}{2}=\frac{\overline{BD}}{2}=\overline{BM}=\overline{DM},$$

што значи дека M е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$. Според тоа, $\measuredangle BAD=90^\circ$, како периферен агол над дијаметар, па затоа $\measuredangle BAC=90^\circ$.

3. Одреден број на момчиња и девојчиња отишле на кампување за време на летниот распуст. Тие испланирале еколошка акција, што би ја завршиле за 29 дена ако секое дете работи рамномерно – во кои било денови сработува ист дел од работата. Момчињата работеле нешто побрзо; за исто време 2 момчиња работат исто колку што работат 3 девојчиња. За среќа, по три дена од почнување со работата, им се придружила поголема група деца, и тоа: момчиња – 8 пати повеќе од првичниот број на девојчиња, и девојчиња – 18 пати повеќе од првичниот број на момчиња. Новодојдените деца работат со иста динамика како и прводојдените. Колку вкупно денови биле работни?

Решение. Да претпоставиме дека на почетокот биле a момчиња и b девојчиња. Дневно тие завршуваат $\frac{1}{29}$-тина од работата. Затоа, првите три дена е завршено $\frac{3}{29}$-тини од работата. Бидејќи момчињата работат 1,5 пати побрзо, ситуацијата е иста како наместо овие a момчиња да имало $1{,}5a$ девојчиња, т.е. вкупно $1{,}5a+b$ девојчиња. Значи, секое девојче дневно завршува $\frac{1}{29(1{,}5a+b)}$ дел од работата.

Потоа дополнително доаѓаат $8b$ момчиња, што е исто како да работат $1{,}5\cdot 8b=12b$ девојчиња и $18a$ девојчиња. Сега сите деца дневно завршуваат работа како да има $1{,}5a+b+12b+18a=19{,}5a+13b=13(1{,}5a+b)$ девојчиња. Оттука, ако по трите дена се потребни уште x денови за да се заврши акцијата, тогаш добиваме $\frac{3}{29}+\frac{13(1{,}5a+b)}{29(1{,}5a+b)}x=1$, од каде добиваме $3+13x=29$, т.е. $x=2$. Според тоа, целата акција траела $3+2=5$ дена.

4. Една истражувачка лабораторија има специјална (бестежинска) просторија во која предметите лебдат онаму каде што се оставени. Просторијата има форма на квадар со висина 4 *m* и со основа квадрат со страна 7 *m*. Во центарот на основата е поставен носечки столб во форма на квадар со основа квадрат со страна 1 *m* и висина 4 m.

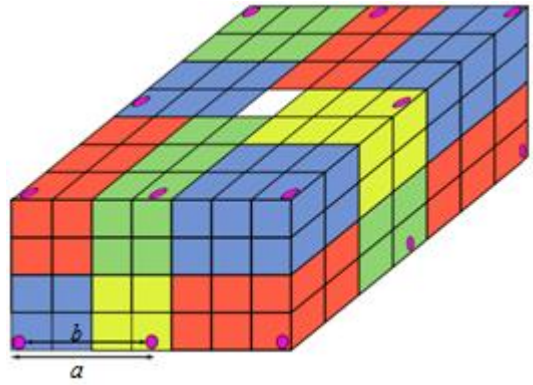
а) Во просторијата се расфрлани 16 балони во форма на топки со дијаметар 10 *cm*, кои лебдат. Дали мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и 2 *m* и ѕидови паралелни на ѕидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него?

б) Што ќе се случи кога би биле 17 балони? Дали, во овој случај, мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и *2 m* и ѕидови паралелни на

зидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него?

Решение. Волуменот на просторијата е еднаков на

$$7 \cdot 7 \cdot 4 - 4 = 192\ m^3.$$



Таа може да се подели на $192 : 12 = 16$ квадари со димензии 2 *m*, 3 *m* и *2 m*, а sидови паралелни на sидовите на просторијата (цртеж десно).

а) Да ги поставиме балоните како на цртежот. Тие се наоѓаат на долната и горната основа на просторијата. Притоа $a = 3{,}5\ m$, а растојанието меѓу било кои два соседни балони е $b = 3{,}5m - 10cm - 5cm = 3{,}35\ m$. Според тоа, не мора да постои квадар со рабови 2 *m*, 3 *m* и 2 *m* и sидови паралелни на зидовите на просторијата, во кој сигурно има делови од 2 различни балони во него.

б) Ако имаме 17 балони, тогаш нивните центри се 17 точки. Сега, од принципот на Дирихле следува дека барем во еден од дадените 16 квадари ќе имаме два центри на балоните. Балоните со овие два центри ќе имаат делови во еден ист квадар.