Сојузен натпревар 1986

I година

1. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки последователни природни броеви такви што секој број е збир на два точни квадрати.

Решение. Да забележиме дека за произволен природен број n важи

$$n^2+n^2=2n^2,\ (n-1)^2+(n+1)^2=2n^2+2.$$

Затоа доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што за некои цели броеви a и b важи: $(n+a)^2+(n-b)^2=2n^2+1$, односно

$$2n(a-b)=a^2+b^2-1.$$

Ако за произволен природен број b земеме $a=b+1$ и $n=b(b+1)$, тогаш ќе важи равенството (1).

2. Нека во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $AB+BD\le AC+CD$. Докажи дека $AB\le AC$.

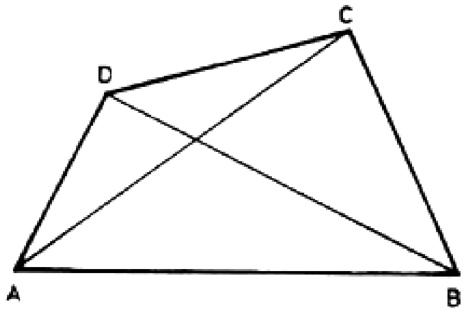
Решение. Нека претпоставиме дека $AB>AC$. Тогаш

$$AC+BD<AB+BD\le AC+CD,$$

па затоа $BD<CD$, цртеж десно. Но, од $AB>AC$ следува

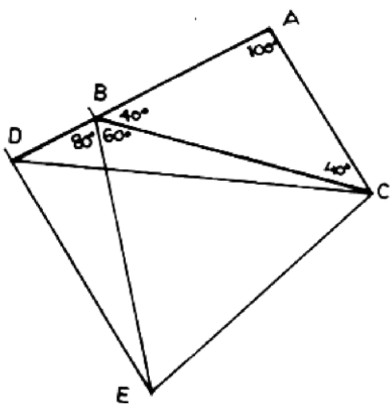
$$\measuredangle DBC<\measuredangle ABC<\measuredangle ACB<\measuredangle DCB,$$

од каде следува $CD<BD$, што е противречност.



3. Во триаголникот ABC аглите кај темињата B и C се еднакви на 40°. Нека D е точка од правата AB таква што точката B е меѓу точките A и D и важи $AD=BC$. Определи ги аглите на триаголникот ADC.

Решение. Нека E е точка од онаа страна на правата BC на која не е точката A, таква што триаголникот BCE е рамностран, цртеж десно. Бидејќи $\measuredangle CAD=\measuredangle ECA=100^\circ$ и $AD=BC=EC$, заклучуваме дека четириаголникот $DECA$ е рамнокрак трапез. Затоа важи $\measuredangle ECD=80^\circ=\measuredangle EBD$, па е $EB=ED$. Значи, точката E е центар на кружницата опишана околу триаголникот BCD. Оттука следува



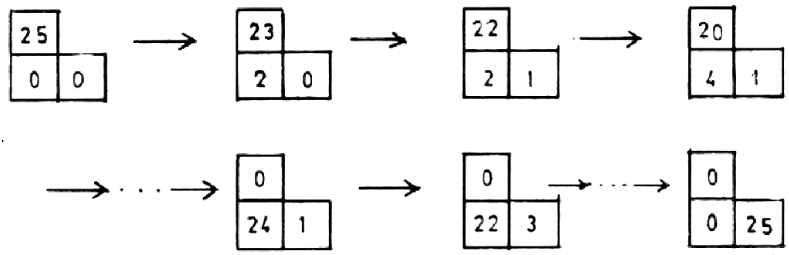
$$\measuredangle BCD = \frac{1}{2}\measuredangle BED = \frac{1}{2}\cdot 20^\circ = 10^\circ .$$

Според тоа, аглите на триаголникот ADC се $100^\circ, 30^\circ$ и 50°.

4. Табла со димензии 5×5 е поделена на 25 единечни полиња (квадратчиња). Во секое поле е поставен по еден жетон. Еден потез се состои во преместување на било кои два жетони, секој од нив во некое соседно поле. Да означиме некое поле. Дали може да се постигне по определен број чекори сите 25 жетони да се најдат во тоа поле? (Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна.)

Решение. Полињата на дадениот квадрат да ги обоиме црно-бело како на шаховска табла, со тоа што аголните полиња ќе бидат црни. Тогаш има вкупно 13 црни и 12 бели полиња. При секое поместување на жетонот на соседно поле се менува бојата на полето на кое се наоѓа жетонот. Затоа при реализирање на секој дозволен потез не се менува парноста на бројот на жетоните кои се наоѓаат, како на белите, така и на црните полиња. Оттука следува дека сите 25 жетони не може да се најдат на ниту едно бело поле.

Ќе докажеме дека сите жетони може да се најдат на било кое црно поле. Прво, сите жетони може да се доведат на централното поле на следниов начин: со секој потез некои два жетона кои се распоредени симетрично во однос на центарот на квадратот се преместуваат на полиња поблиску до центарот кои исто така се симетрични во однос на центарот (полето е поблиску до центарот, ако од него до центарот може да се стигне со помал број преместувања).



За да докажеме дека сите жетони може да се преместат на произволно црно поле, доволно е да докажеме дека сите 25 жетони од некое црно поле може да се преместат со дозволени потези на црно поле кое со претходното има заедничко теме. Тоа може да се постигне, на пример, со потезите прикажани на горните цртежи.

II година

1. Нека x и y се природни броеви такви што $2x^2+x=3y^2+y$. Докажи дека броевите $x-y, 2x+2y+1$ и $3x+3y+1$ се точни квадрати.

Решение. Од претпоставката $2x^2+x=3y^2+y$ следува

$$x^2 = x-y+3x^2-3y^2 = (x-y)(3x+3y+1),$$
$$y^2 = x-y+2x^2-2y^2 = (x-y)(2x+2y+1). \qquad (1)$$

Бидејќи броевите $3x+3y+1=3(x+y)+1$ и $2x+2y+1=2(x+y)+1$ се заемно прости, па затоа

$$x-y = \mathrm{NZD}(x^2, y^2) = (\mathrm{NZD}(x, y))^2 .$$

Сега од равенствата (1) следува дека броевите $3x+3y+1$ и $2x+2y+1$ се точни квадрати.

2. Докажи дека за позитивните броеви a,b и c важи неравенството:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3} .$$

Решение. Прво да забележиме дека очигледното неравенство

$$2(x+y)(x-y)^2 \ge 0 ,$$

кое важи за секои позитивни броеви x и y е еквивалентно на неравенството

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{x+y}{3} , \qquad (1)$$

при шти знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Понатаму, лесно се проверува дека важи

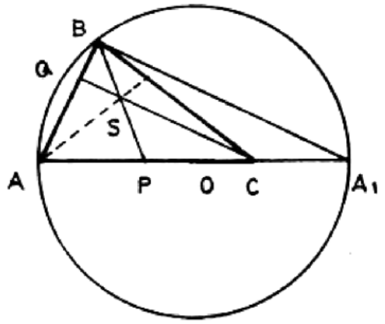
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} = \frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2} . \qquad (2)$$

Сега од (2), користејќи го неравенството (1), добиваме

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\right)$$
$$\ge \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}\right) = \frac{a+b+c}{3}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

3. На дијаметарот AA_1 на кружницата е дадена точка C. Нека B е точка од таа кружница за која важи $AB=CA_1$. Докажи дека во триаголникот ABC симетралата на внатрешниот агол во темето A, тежишната линија од темето B и висината од темето C се сечат во една точка.



Решение. Нека O е центарот на дадената кружница, P е средината на страната AC, Q е подножјето на висината повлечена од темето C на триаголникот ABC и S е пресекот на правите BP и CQ, види цртеж. Правите CQ и A_1B се нормални на AB, па затоа тие се паралелни. Оттука следува

$$\frac{PS}{SB}=\frac{PC}{CA_1}=\frac{AP}{AB}.$$

Тоа значи дека правата AS е симетрала на внатрешниот агол во темето A на триаголникот ABP, што и требаше да се докаже.

4. Дадени се пет различни позитивни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат два броја, такви што ниту збирот ниту апсолутната вредност на разликата не се еднакви ниту на еден од преостанатите три броја.

Решение. Нека се тоа броевите a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 и нека важи

$$0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5.$$

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. да претпоставиме дека за произволни два од овие броеви нивниот збир или апсолутната вредност на нивната разлика е еднаква на некој од преостанатите броеви. Бидејќи за секој $i\in\{1,2,3,4\}$ важи $a_5+a_i>a_5$, добиваме дека мора да важи $a_5-a_i\in\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Поточно важи $a_5-a_1=a_4$ и $a_5-a_2=a_3$. Броевите a_4+a_2 и a_4+a_3 се поголеми од $a_4+a_1=a_5$, па броевите a_4-a_2 и a_4-a_3 припаѓаат на множеството $\{a_1,a_2,a_3\}$. Меѓутоа важи

$$a_4-a_3<a_4-a_2=(a_5-a_1)-(a_5-a_3)=a_3-a_1<a_3,$$

па затоа $a_4-a_2=a_2$, што е противречност.

III и IV година

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ги задоволуваат условите

а) $f(x+f(y))=f(x+y)+1$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$,

б) f е строго растечка функција.

Решение. Од условот а) следува дека за секои реални броеви x и y важи

$$f(x+f(y))=f(x+y)+1=f(y+x)+1=f(y+f(x)). \qquad (1)$$

Понатаму, според б) функцијата е строго растечка, па како секоја строго растечка функција е инјекција, од (1) следува дека $x+f(y)=y+f(x)$. Специјално, ако во последното равенство ставиме $y=0$ добиваме $f(x)=x+f(0)$. Повторно, од условот а) добиваме $x+f(y)+f(0)=x+y+f(0)+1$, односно $f(y)=y+1$ за секој реален број y. Јасно, последната функција ги задоволува двата услови на задачата.

2. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви такви што

$$(n-1)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)=(x_1+x_2+...+x_n)^2. \qquad (1)$$

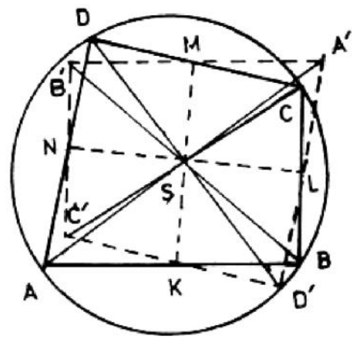
Докажи дека броевите $x_1,x_2,...,x_n$ се сите непозитивни или се сите ненегативни.

Решение. Ако $x_1+x_2+...+x_n=0$, тогаш од (1) следува $x_1=x_2=...=x_n=0$. Нека претпоставиме дека $x_1+x_2+...+x_n>0$. (Случајот $x_1+x_2+...+x_n<0$ се разгледува аналогно.) Ќе докажеме дека $x_i \geq 0$ за секој $i=1,2,...,n$. Нека го претпоставиме спротивното, на пример, $x_n<0$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+...+x_n)^2 &< (x_1+x_2+...+x_{n-1})^2\\ &\leq (n-1)(x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2)\\ &< (n-1)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2),\end{aligned}$$

што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

3. Од средината на секоја страна на тетивен четириаголник конструирана е нормала на спротивната страна. Докажи дека овие четири нормали се сечат во една точка.



Решение. Нека K,L,M,N се соодветно средините на на страните AB,BC,CD,DA на тетивниот четириаголник $ABCD$ и нека S е пресекот на дијагоналите на паралелограмот $KLMN$, цртеж десно. Со A',B',C',D' да ги означиме редоследно симетричните точки на точките A,B,C,D во однос на точката S. Тогаш правите CD и $C'D'$ се паралелни, а точката K е симетрична на средината M на отсечката CD во однос на S, па затоа се совпаѓа со средината на отсечката $C'D'$. Затоа правата која ја содржи точката K, а е нормална на CD воедно е и симетрала на отсечката $C'D'$. Слично и преостанатите три нормали се симетрали на соодветните страни на четириаголникот $A'B'C'D'$. Но овој четириаголник е симетрична слика на тетивниот четириаголник $ABCD$, па затоа тој е тетивен, што значи дека спомenатите четири нормали се сечат во центарот на кружницата опишана околу него.

4. Определи го најголемиот цел број k со следново својство: како и да ги запишеме броевите 1, 2, ..., 64 во полињата на табла 8×8 може да се најдат две соседни полиња такви што разликата на броевите запишани во тие полиња не е помала од k. (Две полиња се соседни ако имаат барем едно заедничко теме.)

Решение. Во табелата прикажана на цртежот десно броевите 1, 2, 3, ..., 64 се запишани во полињата така што разликата на било кои два соседни броја не е поголема од 9. Тоа значи дека $k \leq 9$.

Ќе докажеме дека $k=9$. Било како да ги запишеме броевите во полињата на таблицата од полето со бројот 1 до полето со бројот 64 може да се стигне во најмногу 7 чекори, при што во секој чекор се преминува на соседно поле. Од $\frac{64-1}{7}=9$, следува дека постојат две соседни полиња такви што разликата на броевите запишани во нив не е помала од 9. Оттука следува дека $k>8$, па затоа $k=9$.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64