

Nesbittova nejednakost

Šefket Arslanagić*, Daniela Zubović†

Sažetak

Nesbittova nejednakost je poznata u matematičkoj literaturi o algebarskim nejednakostima. U radu su dana tri nova dokaza Nesbittove nejednakosti.

Ključne riječi: *Nesbittova nejednakost*

Nesbitt's inequality

Abstract

The Nesbitt's inequality is well known in the mathematical literature on algebraic inequalities. In this paper we give three new proofs of this inequality.

Keywords: *Nesbitt's inequality*

1 Uvodni rezultati o Nesbittovoj nejednakosti

Za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

*Odsjek za matematiku, Univerzitet u Sarajevu, email: asefket@pmf.unsa.ba

†Odsjek za matematiku, Univerzitet u Sarajevu, email: dzubovic@pmf.unsa.ba

Nejednakost (1) je prvi puta postavljena u američkom časopisu Educational Times 1903. godine, kao Problem 15114 od strane A. M. Nesbitta, pa se ona danas u njegovu čast naziva Nesbittova nejednakost. Recimo još da se u [1] nalazi deset raznih dokaza nejednakosti (1) te još jedanaest u [2]. Treba uočiti da je nejednakost (1) ciklička, simetrična i homogena. Za njenih 21 dokaza u [1] i [2] su korištene poznate nejednakosti kao što su nejednakosti između sredina, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost, Jensenova nejednakost, Čebiševljeva nejednakost, Muirheadova nejednakost te teorem o preuređenju, metoda supstitucije i diferencijalni račun.

U nastavku ćemo prezentirati tri nova dokaza nejednakosti (1).

2 Tri nova dokaza Nesbittove nejednakosti

Dokaz 1.

Za pozitivne realne brojeve a, b, c označimo

$$M = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},$$

$$A = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

i

$$B = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Uočimo

$$A + B = \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3.$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja vrijedi

$$A + M = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} = 3$$

i

$$B + M = \frac{a+c}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{b+c}{a+b}} = 3.$$

Zbrajanjem prethodne dvije nejednakosti dobijemo

$$6 \leq (M + A) + (M + B) = A + B + 2M = 3 + 2M$$

odakle slijedi

$$M \geq \frac{3}{2},$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad \square$$

Očigledno, jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Dokaz 2.

Nejednakost (1) je homogena, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a + b + c = 1$. Prvo ćemo dokazati da za sve $x \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x}{1-x} \geq \frac{9x-1}{4}. \quad (2)$$

Nejednakost (2) je ekvivalentna sa sljedećim nejednakostima

$$\begin{aligned} 4x &\geq (9x-1)(1-x) \\ \Leftrightarrow 4x &\geq 9x - 9x^2 - 1 + x \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (3x-1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kako je posljednja nejednakost točna, onda je i nejednakost (2) točna, pri tome jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = \frac{1}{3}$.

Sada na osnovu nejednakosti (2) imamo

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \\ &\geq \frac{9a-1}{4} + \frac{9b-1}{4} + \frac{9c-1}{4} \\ &= \frac{9(a+b+c)-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad \square$$

Dokaz 3.

U prvom koraku ćemo za pozitivne realne brojeve a, b i c dokazati nejednakost

$$f(a, b, c) \geq f(t, t, c), \quad (3)$$

gdje je $f(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ i $t = \frac{a+b}{2}$.

Imamo

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \left(\frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{c}{a+b}\right) \\ &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} - \frac{2(a+b)}{a+b+2c} \\ &= \frac{a^3 + ca^2 + cb^2 + b^3 - 2abc - ab^2 - a^2b}{(b+c)(c+a)(a+b+2c)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri, odnosno za dva pozitivna broja vrijedi

$$\begin{aligned} a^3 + ca^2 + cb^2 + b^3 &= \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} + \frac{a^3 + b^3 + b^3}{3} + ca^2 + cb^2 \\ &\geq a^2b + ab^2 + 2abc. \end{aligned} \quad (5)$$

Sada iz (4) i (5) slijedi

$$f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0,$$

odnosno

$$f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right),$$

i time je dokazana nejednakost (3).

Preostaje nam još dokazati nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = f(t, t, c) \geq \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Imamo

$$\begin{aligned}f(t, t, c) &\geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{t}{t+c} + \frac{t}{t+c} + \frac{c}{2t} &\geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2t}{t+c} + \frac{c}{2t} - \frac{3}{2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 + c(t+c) - 3t(t+c) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2ct + c^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (t-c)^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

odnosno

$$\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 \geq 0$$

što je tačno, pa je i nejednakost (6) tačna.

Sada iz nejednakosti (3) i (6) slijedi nejednakosti $f(a, b, c) \geq \frac{3}{2}$, tj. nejednakost (1). $\square$

Recimo još jednom da u (1) vrijedi jednakost ako i samo ako je $a = b = c$.

Inače, ova metoda dokazivanja prezentirana u dokazu 3 je u matematičkoj literaturi na engleskom jeziku poznata pod nazivom *Mixing Variables Method*.

Literatura

- [1] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
- [2] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
- [3] Š. ARSLANAGIĆ, *Jedno poboljšanje Nesbittove nejednakosti i neke njene generalizacije*, MAT-KOL XVII (2011), 5–11, Banja Luka, 2011.
- [4] Š. ARSLANAGIĆ, *O jednoj cikličkoj algebarskoj nejednakosti*, MAT-KOL XIX (2013), 17–23, Banja Luka, 2013.
- [5] A. ENGEL, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997.

<https://matematickitalent.mk> objavено на 13.12.2022

- [6] Z. KADELBURG, D. ĐUKIĆ, M. LUKIĆ, I. MATIĆ, *Nejednakosti, Materijali za mlade matematičare*, Sveska 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.
- [7] D. MITRINOVIĆ, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.
- [8] A. M. NESBITT, *Problem 15114*, Educational Times, 3 (1903) 37–38.