ТРЧАЊЕ ПО КИШИ – ДОБРА ИЛИ ЛОША ИДЕЈА

***Бојана Јевтић*, Београд**

1. Увод

Тема овог рада је један проблем из свакодневног живота, којим су се научници широм света бавили дуги низ година. То је проблем математичко-физичке природе који на први поглед можда делује елементарно, али многи фактори утичу на коначо решење проблема, па га је тешко представити преко математичких формула тако да резултати буду у потпуности прецизни. Ево о чему је реч.

Замислите да се налазите на улици без кишобрана, кабанице, и било каквог огртача, а изненада почиње да пада јака киша, да незгода буде већа, праћена ветром. Шта тада урадити? Већина људи каже да треба брзо отрчати под најближи заклон, што брже то боље, размишљајући на овај начин: „Ако брзо трчим, мање времена ћу провести на киши, па ћу самим тим мање и покиснути". Међутим, постоје и они који се не слажу са тим, већ кажу: „Свакако се треба склонити у заклон, али нема сврхе трчати, јер тада својим телом купимо капи које се налазе испред нас, па на тај начин више покиснемо спреда. И каква је онда корист од трчања?" Људи који тако размишљају и по највећем пљуску спокојно ходају улицом, не обазирући се на оне који једва хватају дах трчећи ка најближим заклонима. Ко је у праву? Намеће се питање која је оптимална брзина кретања када се налазимо на киши?

Ради бољег разумевања проблема размотримо следећу ситуацију. Нека се налазите на месту где ветар дува у правцу од вас ка заклону толико јако да капи кише падају хоризонтално. Тада је јасно да је најбоље кретати се брзином ветра, све капи ће се кретати паралелно вама и неће вас квасити. Неповољно је кретати се спорије, а ни брже – више бисте покисли. Наравно, тешко је кретати се брзином ветра (не знамо његову брзину у датом тренутку), али овај пример нас мотивише да узмемо у обзир ветар као битан фактор када размишљамо о овом проблему. Наиме, оптимална брзина кретања ће зависити од брзине ветра и правца у коме дува, тј. од угла под којим киша пада у односу на вертикалу (тај угао директно зависи од правца ветра).

Овде ћемо размотрити посматрани проблем из математичког угла.

2. Математичка поставка проблема и решење

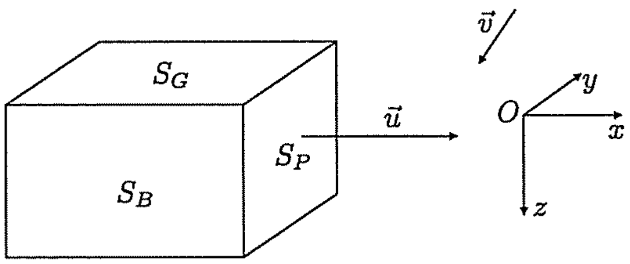
Наведимо формулацију проблема.

> Човек се налази на улици и изненада почиње да пада киша. Најближи заклон се налази на растојању ℓ од њега. Којом брзином би требало да се креће, како би што мање покисао?

Проблем је постављен на такав начин да га је врло тешко прецизно решити. Наиме, човек је веома сложено биће, и при кретању непрекидно мења свој облик (покреће ноге, маше рукама, ...), па је изузетно тешко извршити тачну рачуницу. Стога нам ништа друго не преостаје него да проблем решимо приближно, претпостављајући да се уместо човека креће неки једноставнији облик.

Преформулишимо задатак.

> Правоугли паралелопипед чије су површине страна S_B – површина бочне, S_G – површина горње и S_P – површина предње стране, креће се брзином чији је интензитет u и чији је вектор нормалан на предњу страну. У исто време пада киша тако да је брзина сваке капљице v (слика 1) (вектор v није обавезно усмерен као на слици, киша може падати под разним другим угловима). Количина кишних капи по јединици запремине је једнака k. Колико капи кише N падне на паралелопипед за време за које он пређе пут ℓ, и при којој брзини u ће N бити најмање?



Слика 1.

Решимо сада овај проблем. У ту сврху уводимо координатни систем $Oxyz$, тако да важи: оса Oz је постављена вертикално наниже, оса $0x$ у правцу вектора $\vec{u}$ и оса Oy нормално на раван Oxz тако да је пројекција вектора брзине кишних капи $\vec{v}$ на осу Oy ненегативна. Пошто је вектор $\vec{v}$ задат, познате су његове (скаларне) пројекције на координатне осе. Означимо их са v_x, v_y и v_z. Шта можемо рећи о тим пројекцијама? Јасно је да је $v_y \geqslant 0$ (тако смо изабрали осу Oy) и наравно $v_z > 0$ (киша може падати само на доле). А v_x може бити позитивна (кад киша пада ка циљу), негативна (кад киша пада ка паралелопипеду) и једнака 0 (када киша пада вертикално, нормално на горњу страну паралелопипеда).

Решаваћемо задатак у систему везаном за паралелопипед, тј. сматраћемо да се паралелопипед не креће. У том систему је брзина кишних капи $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, а њене пројекције на осе су $w_x = v_x - u$, $w_y = v_y$ и $w_z = v_z$. Треба одредити колико капи N ће пасти на паралелопипед за време $\tau = \ell/u$ и за које u ће N бити најмање.

Приметимо да за време τ на паралелопипед падну све капи које су на удаљености не више од $\tau \cdot |\vec{w}|$, у правцу супротно вектору $\vec{w}$, тј. све капи које се налазе унутар тела на слици 2. Како израчунати запремину тог тела?

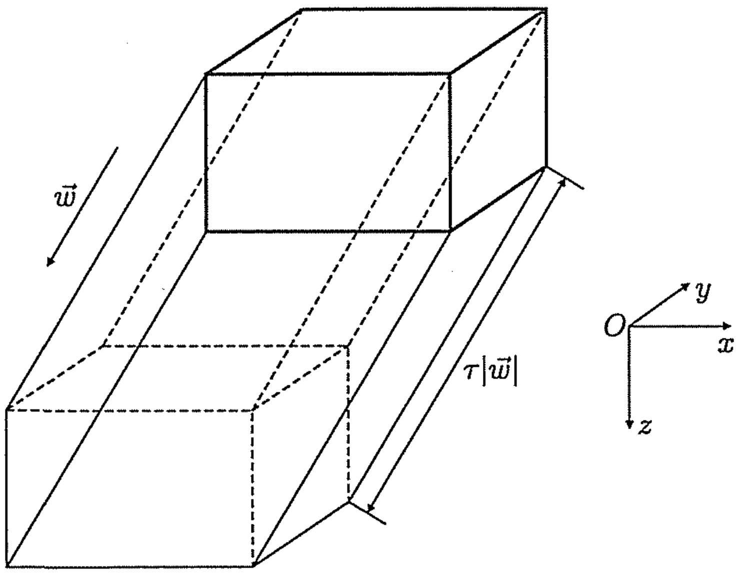
Приметимо да се то тело састоји од три косе призме чије су основе S_P, S_G и S_B, а висине су редом интензитети пројекција вектора $\tau \cdot \vec{w}$ на осе Ox, Oz и Oy. Стога је запремина тог тела:

$$\tau(|w_x|S_P + |w_y|S_B + |w_z|S_G) = \tau(|v_x - u|S_P + v_yS_B + v_zS_G),$$

а тражени број капи је

$$N = \tau k(|v_x - u|S_P + v_yS_B + v_zS_G),$$

јер је дато да је број капи по јединици запремине једнак k.



Слика 2.

С обзиром на то да је $\tau = \ell/u$, добијамо зависност N од u:

$$N = k\ell\frac{|v_x - u|S_P + v_yS_B + v_zS_G}{u}.$$

Сада нам преостаје да нађемо за које u ће N бити минимално.

Пошто су величине k и ℓ константне, ради једноставности разматраћемо израз:

$$\psi = \frac{N}{k\ell} = \frac{|v_x - u|S_P + v_yS_B + v_zS_G}{u}.$$

Размотримо два случаја.

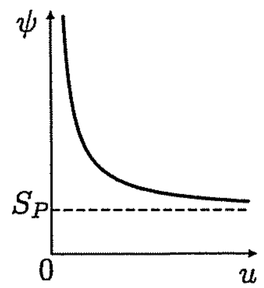
1. Ако киша пада ка телу или вертикално: $v_x \leqslant 0$

У том случају $v_x - u < 0$ и израз ψ добија облик:

$$\psi = \frac{(u - v_x)S_P + v_yS_B + v_zS_G}{u} = S_P + \frac{-v_xS_P + v_yS_B + v_zS_G}{u}.$$

Пошто је $v_x \leqslant 0$, бројилац овог разломка је очигледно позитиван, па ψ опада са порастом u на интервалу $(0, +\infty)$. На слици 3 је приказан график зависноси ψ од u

(добро позната грана хиперболе). Видимо да, иако ψ опада са порастом u, ипак је $\psi > S_P$, при чему $\psi \to S_P$ када $u \to +\infty$. Тако да су у овом случају у праву они људи који трче. Што брже трчиш – мање ћеш да покиснеш!



Слика 3.

Међутим, из претходног разматрања изводимо и један на први поглед неочекиван закључак: пошто је $\psi(u) > S_P$ за произвољно u, $N = k\ell\psi$ је увек веће од $k\ell S_P$. То значи да, којом год брзином да се крећемо (па макар и брзином метка), иста је минимална количина кише која падне на тело, загарантован број капи је $k\ell S_P$.

2. Када киша пада ка заклону: $v_x > 0$

У овом случају је неопходно размотрити два интервала у којима се може налазити u.

1) $0 < u \leqslant v_x$.

Тада је $|v_x - u| = v_x - u$ и $\psi = \dfrac{v_x S_P + v_y S_B + v_z S_G}{u} - S_P$. Та ψ опада на интервалу $(0, v_x]$, па достиже минимум за $u = v_x$:

$$\psi \Big|_{u=v_x} = \frac{v_y S_B + v_z S_G}{v_x}.$$

2) $u > v_x$

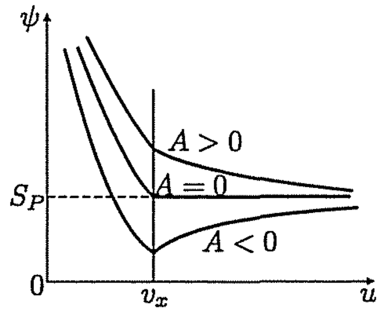
Тада $|v_x - u| = u - v_x$ и

$$\psi = \frac{-v_x S_P + v_y S_B + v_z S_G}{u} + S_P.$$

Овде не можемо одмах рећи како се понаша ψ са порастом u. То зависи од бројиоца разломка, тј. од $A = -v_x S_P + v_y S_B + v_z S_G$. Ако је $A > 0$ онда је ψ опада на интервалу $(v_x, +\infty)$, ако је $A < 0$ онда расте на истом интервалу, а ако је $A = 0$ онда је $\psi = S_P = \text{const}$ на уоченом интервалу.

График зависности ψ од $u \in (0, +\infty)$ је приказан на слици 4. Видимо да на интервалу $(0, v_x)$ криве имају исти облик за сваки од случајева, а након тога, за $u > v_x$, различит.

Одавде закључујемо да када киша пада ка заклону, постоје случајеви када је тачна теорија оних људи који ходају споро по киши, дакле и људи који тако размишљају су понекад у праву.



Слика 4.

Коначно, закључак овог разматрања је следећи.

1. Ако киша пада ка нама или вертикално, треба трчати што је могуће брже, да бисмо мање покисли.

2. Ако киша пада ка заклону (ветар у леђа), онда је неопходно прво проценити величину $A = -v_x S_P + v_y S_B + v_z S_G$; ако је $A > 0$ пожељно је пожурити, ако је $A = 0$ можете се кретати било којом брзином већом од v_x – исто ћете покиснути за сваку од њих. А ако је $A < 0$, онда се треба кретати брзином једнаком v_x – тада ћете покиснути најмање.

Уочимо још једну занимљиву чињеницу која следи из претходног разматрања. Ако је $v_y = 0$, тада неједнакост $A < 0$ даје $v_x S_P > v_z S_G$. За изузетно виског човека је S_P доста веће од S_G, па је у том случају дата неједнакост испуњена за релативно мале, пешачке брзине v_x. Ако би се тај човек кретао ка заклону тако да све време капи буду вертикалне, он би могао остати потпуно сув. Тај феномен се назива „пролазак између капи”.

Сетимо се сада да смо уместо човека који је компликован за разматрања, због специфичног кретања и облика тела, посматрали паралелопипед. Стога, нажалост, не можемо ово решење прихватити као апсолутну истину када се ради о кретању људи.

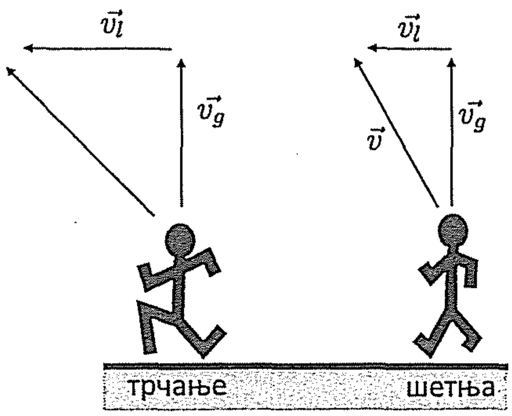
3. Још неки приступи проблему

Prof. Clark Bray – Stanford University

Изложимо начин на који је професор Clark Bray приступио проблему.

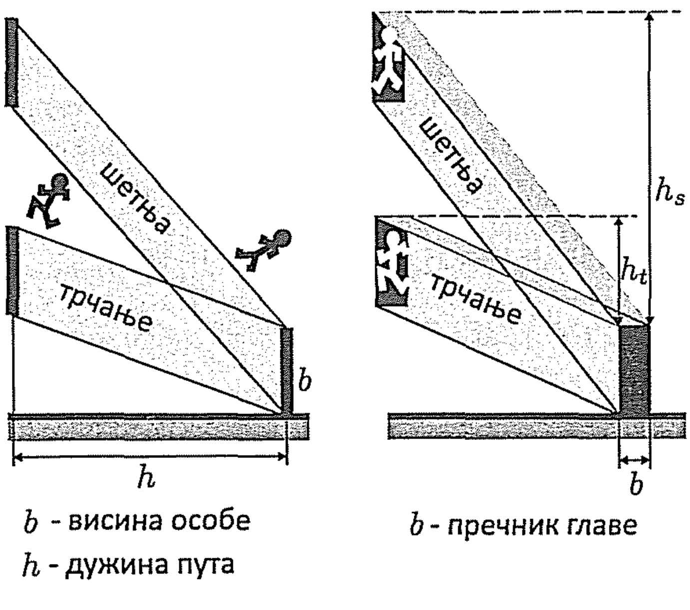
Претпоставимо да киша пада вертикално, без ветра који би променио њен правац. Уместо да по вертикали посматрамо како се киша креће, а човек не, обрнимо угао гледања, нека киша мирује, а човек се креће по вертикали ка непокретним капима. Сада је брзина човека $\vec{v} = \vec{v_l} + \vec{v_g}$, где је $\vec{v_g}$ брзина кише (вектор је у супротном смеру, јер смо обрнули угао гледања, тј. избор референтног система), а $\vec{v_l}$ је брзина којом се креће човек по хоризонтали (слика 5). Уочимо да, када се човек налази на киши, кисне одозго, а и својим телом у току кретања купи капи испред себе.

Посматрајмо прво колико купи тих капи. У ту сврху човека ћемо посматрати као праву линију дужине колика је његова висина. Количина капи које покупи телом



Слика 5.

је сразмерна површини коју пребрише телом за време за које пређе одређени пут. Дакле, треба упоредити те површине у случајевима када човек хода и када трчи и добићемо одговор на питање, шта је повољније. Да бисмо то учинили, померамо линију (човека) у правцу вектора његове брзине (слика 6), док по хоризонтали не пређе одговарајућу раздаљину. Као што можемо видети на слици, добијамо два паралелограма. Упоредимо њихове површ ине. Пошто они имају исту висину, и исту дужину одговарајуће основе (на слици су то h и b), закључујемо да су те површине једнаке! Дакле, човек ће спреда покиснути једнако, без обзира да ли трчи или хода полако. Стога, ако би ставио велики непромочив шешир, могао би спокојно ходати, исто би покисао као и када би трчао.



Слика 6.

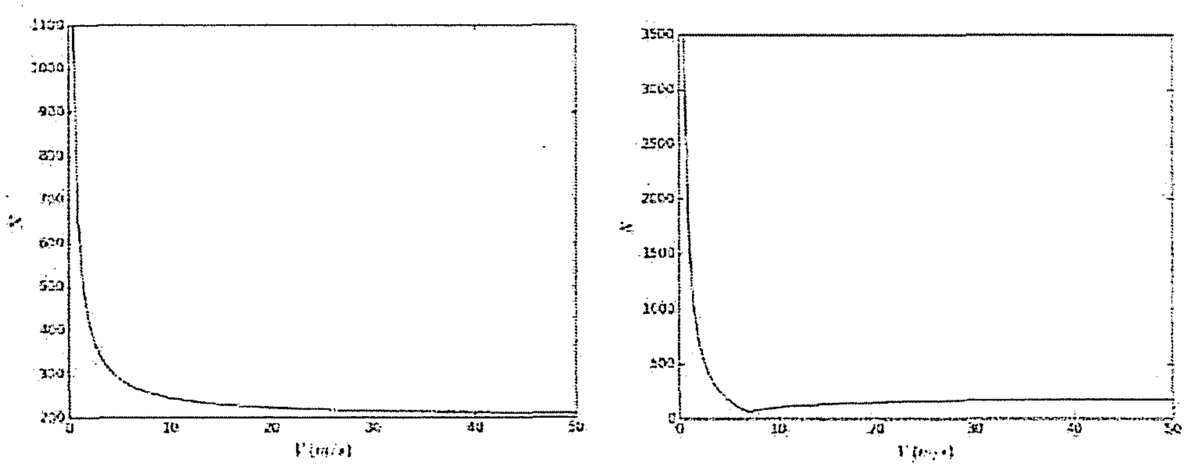
Ако човек нема код себе тај одговарајући шешир или капу, морамо узети у обзир и колико кисне одозго. У ту сврху посматрајмо човека као паралелограм, са основом једнаком површини главе човека (друга страница је једнака висини човека). Тада истим разматрањем као и у првом делу, добијамо по два паралелограма (види слику), где се паралелограми који су тамније осенчени на слици односе као количине капи које падну на главу човека у сваком од случајева. Јасно је да та два паралелограма имају исту основу (површина главе), али висине им нису једнаке, висина је већа при споријем кретању! Дакле, мање ћемо покиснути одозго ако се крећемо брже.

Наравно, ово је и интуитивно јасно, што смо више времена на киши, више ћемо покиснути. За оне који су мање склони математици постоји још интуитивније представљање. Замислите да носите кофу док се крећете по киши. Ако трчите, јасно је да ћете скупити мање воде у кофи. А кофа ће са стране бити исто мокра независно од брзине кретања. Дакле, када сте на киши пратите свој инстинкт – трчите.

Додајмо само да ово није у контрадикцији са претходним разматрањима, наиме, овде је разматран само случај када киша пада вертикално.

Prof. Alex J. DeCaria - Millersville University

Професор метеорологије Alex DeCaria је проблему приступио на веома сличан начин ономе који смо изнели у другом поглављу, па то нећемо понављати. Наведимо само његове скице графика зависности броја капи које падну на тело за одређено време у зависности од брзине којом се крећемо, у оба случаја која су разматрана у другом поглављу.



Слика 7.

На слици 7 лево приказан је случај када киша пада вертикално или ка нама брзином 7m/s, а на слици 7 десно, када пада ка заклону (ветар у леђа). И сада са графика видимо да је у првом случају боље кретати се што брже, а у другом кретати се брзином ветра.

Prof. Franco Bocci

До веома значајних резултата у вези са овим проблемом је дошао италијански физичар Franco Bocci. Његов рад је објављен у часопису Европски журнал физике

(`European Journale of Physics`) у коме је он изнео нове идеје и чиниоце које утичу на решење проблема. Том приликом је истакао да је проблем далеко комплекснији него што је претпостављано у већини студија (претпостављани су једноставни облици људске фигуре, као што смо видели и у разматрањима изнад). Такође је истакао да резултат зависи од облика и оријентације тела, од брзине и смера ветра, од величине кишних капи, итд. Испоставља се да за разне облике тела најбоља стратегија може бити другачија: некад је најбоље трчати што брже, а некад постоји оптимална брзина кретања која такође зависи од горе наведених фактора. Овде нећемо излагати детаље његовог приступа проблему, јер он користи више од елементарне математике.

4. Закључак

Проблем проналажења оптималне брзине кретања по киши је привукао пажњу многих физичара, математичара и других научника. Само решења неких од њих су представљена у овом раду и одабрана су она најједноставнија решења.

Као што смо већ навели, италијански физичар Bocci је највише развио теорију и дао најпрецизније решење. Али проблем је и даље отворен за истраживање, и даље постоје фактори који нису обухваћени досадашњим анализама.

На крају, препоручујемо читаоцима да посете страницу
`http://www.dctech.com/physics/notes/0006.php`.

Литература

[1] И. Ф. Акулич, *Как убегать от дождя*, часопис Квант број 3, 1989.

[2] Alex J. DeCaria, *Will You Get Wetter if You Run Rather than Walk in the Rain?*, Millersville University.

[3] Clark Bray, *Blame it on the rain: Using math to avoid getting soaked*, Stanford University.

[4] Franco Bocci, *Whether or not to run in the rain*, Europen Journal of Physics, 2012.

[5] `http://www.quora.com/What-is-the-optimum-walking-speed-to-prevent-getting-wet-in-the-rain`

[6] Калкулатор: `http://www.dctech.com/physics/notes/0006.php`, 2000

[6] Minute Physics `https://www.youtube.com/watch?v=3MqYE2UuN24`

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2015/16 година