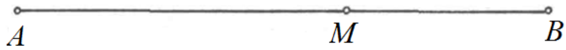
Алија Муминагиќ, Данска
Ристо Малчески, Македонија

ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК И ЕДИНЕЧНАТА КРУЖНИЦА



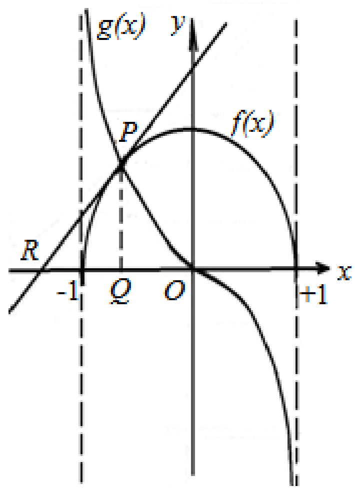
Како што знаеме: *ако отсечката* AB *со точка* M *е поделена на два дела така што* $\overline{AB}$ *се однесува спрема својот подолг дел* $\overline{AM}$*, како нејзиниот подолг дел* $\overline{AM}$ *спрема пократкиот дел* $\overline{MB}$*, односно*

$$\overline{AB}:\overline{AM}=\overline{AM}:\overline{MB}\ , \tag{1}$$

тогаш велиме дека точката M *ја дели отсечката* AB *по златен пресек.*

Да забележиме дека ако ставиме $\overline{AB}=a+b, \overline{AM}=a$, тогаш пропорцијата (1) можеме да ја запишеме во видот $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$. Притоа, може да се докаже дека $\frac{a}{b}=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, и притоа важи $\frac{b}{a}=\frac{1}{\phi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (види [1]). Златниот пресек, кој уште го нарекуваат *Divina proportion***,** што на латински значи *божествена пропорција,* во минатото го сметале за божји дар, кој од олимписките височини на математиката слегол во обичните учебници. Постојат повеќе причини што оваа пропорција е наречена божествена, меѓу кои се нејзината врска со Фибоначиевите броеви (види [3]), како и фактот дека уметничикте дела, како и објектите во природата во чии соодноси е вграден златниот пресек се најпријатни за човековото око (види [4]).

За златниот пресек и неговата примена е доста пишувано, а некои работи можете да ги најдете и во статиите наведени на крајот од оваа статија. Меѓутоа, златниот пресек се појавува и на некои сосема неочекувани места. Тому еден ваков пример е предмет на нашите следни разгледувања.



Како што знаеме, графикот на функцијата

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,\ x\in[-1,1]$$

е полукружницата над $x-$оската чиј дијаметар е отсечката $AB: A(-1,0), B(1,0)$, цртеж десно. Понатаму, изводот на функцијата $y=f(x)$ е функцијата

$$g(x)=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$x\in[-1,1]$, и нејзиниот график е прикажан на горниот цртеж. Како што можеме да видиме функциите $f(x)$ и $g(x)$ се сечат во точката P. Да ги определиме координатите на точката P. Имаме, $f(x)=g(x)$, од каде добиваме $\sqrt{1-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, односно $x^2-x-1=0$. Решенијата на последната квадратна равенка се $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, т.е. т.е. $x_1=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\frac{1}{\phi}$ и $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$. Пресекот на графиците на двете функции е во вториот квадрант, што значи првата координата на точката P е $x_1=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\frac{1}{\phi}$. Понатаму,

$$y_1=f(x_1)=f(-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})=f(-\tfrac{1}{\phi})=\sqrt{1-\frac{1}{\phi^2}}=\sqrt{\frac{\phi^2-1}{\phi^2}}=\sqrt{\frac{\phi}{\phi^2}}=\frac{1}{\sqrt{\phi}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Според тоа, пресекот на функциите $f(x)$ и $g(x)$ е точката $P(-\frac{1}{\phi},\frac{1}{\sqrt{\phi}})$, т.е. $P(-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$.

Ќе ја определиме тангентата на графикот на функцијата $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ во точката $P(-\frac{1}{\phi},\frac{1}{\sqrt{\phi}})$. Со замена во

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

ако искористиме дека

$$f'(x_0)=-\frac{-\frac{1}{\phi}}{\sqrt{1-(-\frac{1}{\phi})^2}}=\frac{\frac{1}{\phi}}{\sqrt{\frac{\phi^2-1}{\phi^2}}}=\frac{\frac{1}{\phi}}{\sqrt{\frac{1}{\phi}}}=\frac{1}{\sqrt{\phi}},$$

ја добиваме равенката на тангентата на функцијата $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ во точката $P(-\frac{1}{\phi},\frac{1}{\sqrt{\phi}})$:

$$y-\frac{1}{\sqrt{\phi}}=\frac{1}{\sqrt{\phi}}(x+\frac{1}{\phi}). \tag{2}$$

Ако во (2) ставиме $y=0$, добиваме $-\frac{1}{\sqrt{\phi}}=\frac{1}{\sqrt{\phi}}(x+\frac{1}{\phi})$, од каде за пресечната точка на тангентата со x-оската, наоѓаме $x=-\phi$, што значи дека пресечната точка $R(-\phi,0)$.

Ќе ја определиме нормалата на крафикот на функцијата $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ во точката $P(-\frac{1}{\phi},\frac{1}{\sqrt{\phi}})$. Со замена во

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),$$

ја добиваме равенката на нормалата

$$y-\frac{1}{\sqrt{\phi}}=-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\phi}}}(x+\frac{1}{\phi}). \qquad (3)$$

Ако во (3) ставиме $y=0$, добиваме

$$-\frac{1}{\sqrt{\phi}}=-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\phi}}}(x+\frac{1}{\phi}),$$

од каде за пресечната точка на тангентата со x-оската, наоѓаме $x=0$, што значи дека нормалата на графикот на функцијата $f(x)$ во точката P минува низ координатниот почеток, т.е. триаголникот OPR е правоаголен, во што дополнително можеме да се увериме со помош на Питагоровата теорема. Да забележиме дека последното следува и од тоа што нормалата на тангентата на кружницата повлечена во допирната точка минува низ центарот на кружницата, а тоа во нашиот случај е координатниот почеток $O(0,0)$.

Сега, плоштината на триаголникот OPR можеме да ја пресметаме на два начина. Имаено, ако земеме предвид дека $OP\perp PR$, $\overline{OP}=1$ и

$$\overline{PR}=\sqrt{(-\frac{1}{\phi}+\phi)^2+(\frac{1}{\sqrt{\phi}}-0)^2}=\sqrt{\phi},$$

добиваме

$$P_{\triangle OPR}=\frac{\overline{OR}\cdot\overline{PQ}}{2}=\frac{1}{2}\phi\cdot\frac{1}{\sqrt{\phi}}=\frac{\sqrt{\phi}\cdot 1}{2}=\frac{\overline{PR}\cdot\overline{OP}}{2}.$$

Литература

1. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А. (2021). Суперзлатен правоаголник, Математички талент, Скопје
2. Малчески, Р. (2022). Златен пресек и златен правоаголник, Математички талент, Скопје
3. Малчески, Р., Малчески, А. (2021). Златен пресек, Математички талент, Скопје
4. Иванова, А., Велинов, Д. (2021). Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Математички талент, Скопје
5. Целакоска-Јорданова, В. (2022). Неколку задачи за златен пресек, Математички талент, Скопје