Катерина Аневска
Скопје

30 ЗАДАЧИ ЗА КОИ ТРЕБА ДОСЕТЛИВОСТ И ЗНАЕЊЕ

Често пати се вели дека за решавање на посложени математички задачи треба да ти дојде идеја. Тоа е точно, но да не заборавиме дека е потребно и знаење. Во ова наше дружење ќе разгледаме повеќе задачи, за дел од кои е потребно да ти текне, но мора и да имаш доволно знаење својата идеја да ја реализираш.

Прво ќе разгледаме неколку задачи со броеви и цифри.

Задача 1. Разликата на еден четирицифрен и еден трицифрен број е $****-***=4$. Секоја ѕвездичка претставува по една цифра. Најди ги сите решенија.

Решение. Јасно, четирицифрениот број не може да биде поголем од 1003, а трицифрениот број не може да биде помал од 996 (Зошто?). Така ги добиваме следниве четири решенија:

$$1003-999=1002-998=1001-997=1000-996=4$$

Задача 2. Користејќи некои од основните математички операции (собирање, множење, делење и одземање) запиши го бројот 1000 со помош на 8 исти цифри. Покрај цифрите користи ги и основните математички операции.

Решение. Две решенија на задачата се

$$888+88+8+8+8=1000,$$
$$(5+5+5+5)\cdot 5\cdot(5+5-5)=1000.$$

Обиди се да најдеш и други решенија на оваа задача.

Задача 3. Запиши го бројот 100 на четири различни начини, така што секој пат ќе користиш по пет исти цифри и некои од основните математички операции.

Решение. Четири различни запишувања на бројот 100 кои ги задоволуваат условите на задачата се

$$111-11=100,$$
$$33\cdot 3+3:3=100,$$
$$(5+5+5+5)\cdot 5=100,$$
$$5\cdot 5\cdot 5-5\cdot 5=100.$$

Задача 4. Во равенството

$$1+1+1+9-1=150,$$

кое што очигледно не е точно, Александар ставил само една цртичка и добил точно равенство.Чудно, навистина! Знаеш ли ти каде Александар ја ставил таа цртичка?

Решение. Јасно, за да се добие израз кој има смисла цртичката може да се стави само на еден од знаците + или на знакот $-$. Очигледно точно равенство не се добива ако цртичката се стави на знакот $-$. Значи, Александар цртичката ја ставил на еден од знаците +. Сега е јасно дека тоа е коса цртичка со којапрвиот или вториот знак + се претвора во цифрата 4. Така го добиваме точното равенство:

$$1+141+9-1=150,$$

$$141+1+9-1=150.$$

Задача 5. Колкава е разликата меѓу збирот на сите парни и сите непарни броеви, помали од 2000?

Решение. *Прв начин*. Разликата најлесно ќе ја пресметаме ако ги разгледаме паровите на последователните броеви, прво непарен, па парен, поаѓајќи од најголемиот, од бројот 1999. Имаме 1000 непарни броеви и заедно со нулата 1000 парни броеви. Бараната разлика е:

$$(1999-1998)+(1997-1996)+...+(5-4)+(3-2)+(1-0)=1000$$

бидејќи имаме 1000 загради, а разликата на броевите во секоја од заградите е 1.

Втор начин. Збирот на непарните броеви е

$$\begin{aligned}1+3+5+...+1995+1997+1999&=(1+1999)+(3+1997)+...+(999+1001)\\&=500\cdot 2000=1000000.\end{aligned}$$

Збирот на парните броеви е

$$\begin{aligned}2+4+6+...+1998&=(2+1998)+(4+1996)+...+(998+1002)+1000\\&=499\cdot 2000+1000=999000.\end{aligned}$$

Според тоа, бараната разлика е

$$1000000-999000=1000.$$

Задача 6. Како може да се напише бројот 6 со користење само на три цифри 1 и потребните математички операции?

Решение. За ваквото запишување ќе се користиме со поимот *факториел*. Под поимот $n!$ (читаме „ен факториел“), каде што n е природен број, се подразбира производот $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$. Во нашиот случај имаме

$$6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = (1+1+1)!$$

Задача 7. Во шесте празни квадратчиња впиши соодветни природни броеви, така што збирот на броевите во секој ред, колона и дијагонала ќе биде еднаков на 96.

		33
31	28	

Решение. Бројот во централното поле е 32. Имено:

$$96-(31+33)=32.$$

Понатаму, во празното квадратче на третиот ред треба да се запише бројот

$$96-(28+31)=37 \ .$$

Сега лесно се наоѓаат останатите пет броја. Пополнетата табела е прикажана десно.

27	36	33
38	32	26
31	28	37

Задача 8. Ако меѓу цифрите на двоцифрен број вметнеме нула, се добива троцифрен број кој што е 9 пати поголем од почетниот број. Определи ги тие два броја.

Решение. Нека почетниот број е $10x+y$. Троцифрениот број, добиен со вметнување нула меѓу цифрите на двоцифрениот број, ќе има облик: $100x+y$. Значи, според условот на задачата ја добиваме равенката:

$$100x+y=9(10x+y).$$

Оттука добиваме $10x=8y$, т.е. $y=\frac{5}{4}x$. Но, x и y се цифри, па затоа имаме единствено решение $x=4, y=5$.

Конечно, бараните броеви се 45 и 405.

Задача 9. Реши го ребусот:

$$\overline{ovca}+\overline{ovca}=\overline{stado} \ ,$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

Решение. Бидејќи збирот на два четирицифрени броја е помал 20000 заклучуваме дека $c=1$. Понатаму, очигледно на буквата o и соодветствува парна цифра поголема од 5.Имено, ако $o \leq 4$, тогаш

$$\overline{ovca}+\overline{ovca} \leq 9999 < \overline{1tado} \ ,$$

што е противречност.

Ако $o=6$, тогаш $a=3$ или $a=8$. За $a=3$ имаме $\overline{6vc3}+\overline{6vc3}=\overline{1t3d6}$, од каде добиваме $t=2$ или $t=3$. Случајот $t=3$ не е можен, а за $t=2$ имаме $\overline{6vc3}+\overline{6vc3}=\overline{123d6}$, од каде ќе следува $v=1$, што повторно не е можно. За

$a=8$ имаме $\overline{6vc8}+\overline{6vc8}=\overline{1t8d6}$ и повторно $t=2$ или $t=3$. Ако $t=2$, тогаш $v=4$, т.е. $\overline{64c8}+\overline{64c8}=\overline{128d6}$. Затоа $c\leq 3$, па единствена можност е $c=3$ и едно решение е $6438+6438=12876$. На сличен начин за $t=3$ го добиваме решението $6928+6928=13856$, деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Ако $o=8$, тогаш $a=4$ или $a=9$. За $a=4$, слично како погоре се заклучува дека задачата нема решение, а за $a=9$ на сличен начин како погоре добиваме уште едно решение на задачата: $8479+8479=16958$, деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Задача 10. Збирот на три природни броеви е еднаков со нивниот производ. Кои се тие броеви?

Решение. Нека за природните броеви m,n,k важи

$$mnk=m+n+k.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $k\leq m\leq n$.

Ако $k=1$, тогаш

$$mn=m+n+1,$$

од каде ја добиваме равенката

$$(m-1)(n-1)=2.$$

Јасно, при услов $m\leq n$ во множеството природни броеви единствено решение на последната равенка е $m=2, n=3$. Притоа важи

$$3\cdot 2\cdot 1=3+2+1,$$

т.е. едно решение на задачата се броевите 1, 2 и 3.

Ако $k\geq 2$, тогаш

$$2mn\leq mnk=m+n+k\leq 3n,$$

па затоа $2m\leq 3$, од каде добиваме $m=1$, што противречи на $2\leq k\leq m$.

Следните неколку задачи се текстуални задачи, за чие решавање треба да имаш идеја, но треба да знаеш и да решаваш равенки, бидејќи решавањето на овие задачи може да биде по аритметички пат или со помош на равенки.

Задача 11. Гуска и пол за ден и пол неси јајце и пол. Колку јајца ќе снесат девет гуски за девет дена?

Решение. Бидејќи гуска и пол за ден и пол неси јаце и пол, заклучуваме дека гуска и пол за три пати помалку време неси три пати помалку јајца, што значи дека гуска и пол за половина дена неси половина јаце. Слично

заклучуваме дека гуска и пол за еден ден неси 1 јаце, па затоа гуска и пол за девет дена неси 9 јајца. Но, $9=6\cdot1\frac{1}{2}$, па затоа 9 гуски за девет дена ќе снесат шест пати повеќе јајца, односно $6\cdot9=54$ јајца.

Задача 12. Ако 6 мачки ловат 4 глувци за 10 дена, за колку дена 9 мачки ќе уловат 12 глувци?

Решение. Бидејќи 6 мачки за 10 дена ловат 4 глувци, добиваме дека $6:2=3$ мачки за 10 дена ќе уловат $4:2=2$ глувци. Според тоа, $3\cdot3=9$ мачки за 10 дена ќе уловат $3\cdot2=6$ глувци (3 пати повеќе отколку што ќе уловат 3 мачки). Конечно, 9 мачки за $2\cdot10=20$ дена ќе уловат $2\cdot6=12$ глувци.

Задача 13. Глигорие брзал да ја реши наградната задача од „Математички талент“, затоа што требало да ја испрати најдоцна следното утро. Меѓутоа, снемало струја и Глигорие истовремено запалил две различни свеќи со иста должина. Но, заради заморот и недоволното осветлување, набрзо заспала, а го разбудила гласната музика од радиото, што се вклучило кога дошла струјата. Глигорие ги погледнал свеќите и утврдил дека прилично изгореле и дека остатокот на подебелата е четири пати подолг од остатокот на потенката свеќа. Не ја знаел должината на свеќите, но знаел дека подебелата цела изгорува за 5 часа, а потенката за 4 часа. Користејќи ги овие податоци Глигорие пресметал колку долго немало струја. Како тоа го направил?

Решение. Од податцоците имаме дека 1 час изгорува $\frac{1}{5}$ од подебелата свеќа и $\frac{1}{4}$ од потенката свеќа. Нека почетната должина на свеќата е 1. По x часа, од првата останало $1-\frac{x}{5}$, а од втората $1-\frac{x}{4}$. Според условот на задачата имаме дека $1-\frac{x}{5}=4(1-\frac{x}{4})$, од што следува дека $x=\frac{15}{4}$ часа. Значи, струја немало 3 часа и 45 минути.

Задача 14. На прашањето од наставникот Петре: „Колку ученици денес не се дојдени на час?“, дежурниот ученик Глигорие одговорил: „Три четвртини од отсутните и уште три четвртини од еден ученик го дава бројот на отсутните ученици“. Наставникот Петре бил добар математичар, па лесно пресметал колку ученици се отсутни. Знаете ли и вие?

Решение. Нека x ученици се отсеутни. Тогаш

$$\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}=x,$$

од каде наоѓаме $\frac{x}{4}=\frac{3}{4}$,т.е. $x=3$. Значи, отсутни се 3 ученици.

Задача 15. Александар раситнил банкнота од 100 денари во монети од 5 денари и 2 денари,при што добил 41 монета. Колку монети од 5, а колку од 2 денари имал Александар?

Решение. *Прв начин.* Ако сите монети се од 2 денари, тогаш Александар ќе има $41\cdot 2=82$ денари, т.е. $100-82=18$ помалку. Бидејќи $5=2+3$, заклучуваме дека Александар имал $18:3=6$ монети од 5 денари и $41-6=35$ монети од 2 денари.

Втор начин. Ако има x монети од 5 денари, тогаш Александар има $41-x$ монети од 2 денари. Според тоа,

$$5x+2(41-x)=100,$$

па затоа $x=6$. Значи, Александар има 6 монети од 5 денари и 35 монети од 2 денари.

Задача 16. Тројца рибари уловиле одреден број риби и ги ставиле во заедничка корпа. Пред враќањето еден од нив зел од корпата третина од рибите и заминал. Вториот, не знаел дека првиот рибар го зел својот дел, зел третина од рибите од корпата и заминал. На крајот, третиот зел третина од преостанатите риби. Во корпата останале уште 8 риби. По колку риби зел секој од рибарите?

Решение. Секој пат кога некој рибар ќе земел третина од рибите, во корпата остануваle два пати повеќе риби. Значи, третиот зел $8:2=4$ риби (третина од 12) и останале 8 риби. Според тоа, по вториот рибар во корпата останале 12 риби, па затоа тој зел $12:2=6$ риби (третина од 18). Конечно, првиот во корпата оставил 18 риби, што значи дека зел $18:2=9$ (третина од 27). Значи, рибарите по ред зеле: првиот 9, вториот 6, а третиот 4 риби.

Задача 17. Колку пати од полноќ до пладне ќе се поклопат големата и малата стрелка на часовникот, не сметајќи го полноќ, а броејќи го пладнето? Пресметај ги времињата на тие поклопувања.

Решение. Првото поклопување ќе биде по повеќе од еден час, т.е. меѓу 1 и 2 часот. Второто ќе биде меѓу 2 и 3 часот, итн. Предпоследното поклопување е меѓу 10 и 11 часот, а последното, *кое е единаесетто,* по 11 часот, односно точно во 12 часот. Јасно, меѓу секои две поклопувања поминува исто време,

затоа што брзините на движењето на стрелките не се менуваат. Значи, првото поклопување било после $\frac{12}{11}$ часови, т.е. во $1\frac{1}{11}$ часот.

Останатите се случуваат по ред, во: $2\frac{2}{11}, 3\frac{3}{11}, ..., 10\frac{10}{11}, 11\frac{11}{11} = 12$ часот.

Задача 18. Во VI^a одделение има 6 ученици повеќе отколку во VI^b. Учениците од двете одделенија еден ден биле заедно на пошумување. Секој ученик од VI^a засадил по 5 дрвца, а секој ученик од VI^b одделение засадил по 6 дрвца. Колку ученици имало во секое одделение учениците од двете одделенија засадиле ист број дрвца?

Решение. Ако во VI^a има x ученика, тогаш во VI^b има $x-6$ ученика. Тогаш добиваме: $5x = 6(x-6)$, а оттука $x = 36$. Значи, во VI^a има 36 ученика, а во VI^b има 30 ученици.

Задача 19. На површината на Месечината секое тело е шест пати полесно отколку на површината на Земјата. Колку килограми ќе тежи еден човек на Месечината, ако на Земјата тој е за $60\,kg$ потежок отколку на Месечината?

Решение. Ако човекот човек на Земјата тежи x килограми, тогаш на Месечината ќе тежи $x-60$. Значи, $6(x-60) = x$, од каде добиваме $x = 72$. Според тоа, човекот на Земјата ќе тежи $72\,kg$.

Задача 20. Летало едно јато гуски. Во пресрет им долетала една гуска и ги поздравила: „Добро утро, сто гуски!“ . „Не сме сто, - одговорила една гуска од јатото, - туку, кога би биле уште толку колку што сме, па уште половина, па уште четвртина од сегашниот наш број, па и со тебе, ако ни се придружиш, би биле 100 гуски“. Колку гуски имало во јатото?

Решение. Ако x е непознатиот број на гуски во јатото, тогаш од условот на задачата ја добиваме равенката

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100\,,$$

чие решение е $x = 36$. Значи, во јатото имало 36 гуски.

Задача 21. На роденденската забава кај Маја биле 19 нејзини другари и другарки. Маја го пуштила новиот популарен диск со музика што сите ја сакаат и, се разбира, сите танцувале и убаво се забавувале. Маја танцувала

со седум нејзини другари, Оља со осум, Биби - со девет, и така натаму, до Ана, која танцувала со сите момчиња на забавата. Колку момчиња биле на забавата?

Решение. Нека на забавата имало x девојчиња. Првата, Маја, танцувала со $6+1$ другари; втората, Оља, со $6+2$; третата, Биби, со $6+3$ итн. x - тата, Ана, со $6+x$ другари. Затоа

$$x+(6+x)=20,$$

од каде следува $x=7$. Според тоа, на забавата од што следи дека на забавата имало 7 девојчиња и $20-7=13$ момчиња.

Задача 22. Таткото е постар од синот 24 години. Колку години има синот, ако по 3 години тој ќе биде 5 пати помлад од таткото?

Решение. Ако синот има x години, тогаш таткото има $x+24$ години. Од условот на задачата, дека по 3 години синот ќе биде 5 пати помлад од таткото, ја добиваме равенката:

$$5(x+3)=(x+24)+3.$$

Со нејзино решавање добиваме дека $x=3,$ што значи дека синот има 3 години.

Задача 23. Во секоја од две кошници (кошница А и кошница Б) има по 100 јајца. Ако од кошницата А се земат неколку јајца, а од кошницата Б онолку јајца колку што останале во кошницата А, колку јајца ќе останат вкупно во двете кошници?

Решение. Во почетокот во кошниците А и Б имавкупно 200 јајца. Ако од кошницата А се земат x јајца, тогаш, од кошницата Б сеземени $100-x$ јајца. Според тоа, вкупно се земени $x+(100-x)=100$ јајца, што значи, од 200 јајца во двете кошници се земени 100 јајца. Значи, во двете кошници останале вкупно 100 јајца.

Следните неколку задачи се таканаречените логички задачи, иако за секоја математичка задача може да се каже дека е некој вид логичка задача.

Задача 24. Мартин и Диме ги имаат презимињата: Мартиновски и Димевски. Како се презива секое од децата, ако Мартин е 2 години постар од Мартиновски?

Решение. Бидејќи Мартин е постар од Мариноски, неговото презиме е Димески, а презимето на Диме е Мартиновски.

Задача 25. Дени влегува во затемнета просторија. На комодата покрај влезната врата стои плинска ламба, на масата, во средината на просторијата, има свеќа, а на витрината покрај масата има петролејска ламба. За да е просторијата доволно осветлена, треба да се запалат сите три расположиви светилки. Што најнапред ќе запали Дени?

Решение. За да може да запали било која од трите светилки, Дени мора *најнапред* да запали кибрит, или запалка.

Задача 26. Влатко денес одново задоцнил на час. Вака се оправдувал: „Знаете, наставничке, никако не можев да стасам порано. Надвор е се подмрзнато. Кога ќе пречекориш еден чекор напред, се слизнуваш два чекора назад.“ Наставничката му одговорила: “Е, Влатко, тогаш е вистинско чудо што си сега овде!”

Што мислите вие, дали Влатко можел да дојде во училиштето без чудо?

Решение. Можел, но за тоа требало да се заврти во обратна насока и да оди кон неговиот дом. Се разбира, за да гледа каде оди морал во едната рака да држи огледало свртено station наназад.

Задача 27. Две деца, Ана и Горан, седат на една клупа во паркот и разговараат: „Јас сум момче“, вели детето со црвената коса. „Јас сум девојче“, вели детето со русата коса. Ако барем едно од дете лаже, кое е тоа дете?

Решение. Има вкупно четири можности: Не може двете деца да ја зборуваат вистината, затоа што барем едното од нив лаже. Отпаѓа и можноста едното од двете деца да лаже, а другото да ја зборува вистината, затоа што ако едното дете излажало (на пример, дека тоа е момче), другото не може да ја зборува вистината (дека е девојче). Според тоа, двете деца излажале.

Значи, Ана има црвена, а Горан руса коса.

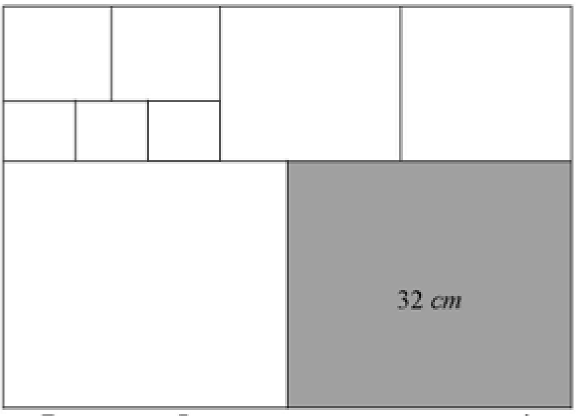
Задача 28. Фред Кременко и Барни Каменко наизменично земаат камчиња од купот што има вкупно 2022 камчиња. Секој може да земе 1, 7 или 13 камчиња одеднаш. Победува оној кој ќе го земе последното камче. Ако Фред ја започнува играта, одреди ја стратегијата што му дозволувана Фред или на Барни да победат без обир на тоа како игра противникот.

Решение. Бидејќи броевите 1, 7 и 13 се непарни, а Фред ја почнува играта, по неговиот прв потег на купот ќе остане непарен број камчиња, а по потегот на Барни ќе остане парен број камчиња. Тоа ќе се случува по секој потег на Фред и по секој потег на Барни, па затоа Фред никако не може да го земе

последното камче (мора по неговиот потег да има непарен број камчиња, а 0 не енепарен број). Барни може да игра опуштено, зашто сигурно ќе победи.

Млади пријатели, на крајот од ова наше дружење ќе разгледаме уште две геометриски задачи, за чие решавање покрај знаење ни е потребна и идеја.

Задача 29. Правоаголникот на долниот цртеж е поделен на квадрати. Определи ја плоштината на правоаголникот, ако периметарот на најголемиот квадрат е еднаков на $32\,cm$.



Решение. Јасно, должината на страната на двата најголеми квадрати е еднаква на $8\,cm$, а должината на поголемата страна на правоаголникот е еднаква на $2\cdot 8=16\,cm$. Нека должината на страната на најмалите три квадрати е x. Тогаш должината на страната на двата квадрати над нив е еднаква на $\frac{3}{2}x$, па затоа должината на страната на третите по големина квадрати е Според тоа, поголемата страна Двата квадрати над трите најмали квадрат имаат страна еднаква на Трите најмали квадрати се еднакви, па двата квадрата над нив имаат страни по 3 cm, од што заклучуваме дека двата к $x+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}x$. Според тоа,

$$2\cdot\frac{5}{2}x+3x=16,$$

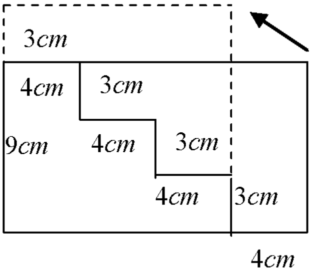
од каде добиваме $x=2\,cm$. Значи, должината на помалата страна на правоаголникот е еднаква на

$$x+\frac{3}{2}x+8=2+3+8=13\,cm.$$

Конечно, плоштината на правоаголникот е еднаква на $13\cdot 16=208\,cm^2$.

Задача 30. Правоаголно парче картон со димензии $9cm \times 16cm$, треба да се расечи на два дела, од кои може да се состави квадрат.

Решение. Плоштината на дадениот правоаголник е еднаква на $9 \cdot 16 = 144\,cm^2$. Според тоа, должината на страната на квадратот е $12\,cm$. Значи, при сечењето едната страна на правоаголникот треба да ја намалиме за $4\,cm$, а другата да ја зголемиме за 3 . Бараното расекување и начинот на кој ќе се состави квадратот се дадени на цртежот десно



.