БМО 2010

1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0 .$$
Решение. *Прв начин*. Неравенството е еквивалентно со неравенството
$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-a^3b^2c-b^3c^2a-c^3a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0 ,$$
па затоа доволно е да докажеме дека
$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b . \qquad (1)$$
Од неравенството меѓу средините следува
$$a^3b^3+a^3b^3+a^3c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^3b^3\cdot a^3c^3}=3a^3b^2c .$$
Конечно, ако ги собереме аналогните циклични неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.
Втор начин. Ако двете страни на неравенството ги поделиме со $abc>0$ и додадеме на 3 го добиваме неравенството
$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+1+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+1+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}+1\geq 3 ,$$
кое е еквивалентно со неравенството
$$\frac{b(c+a)}{a+b}+\frac{c(a+b)}{b+c}+\frac{a(b+c)}{c+a}\geq 3. \qquad (2)$$
Неравенството (2) следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Навистина
$$\frac{b(c+a)}{a+b}+\frac{c(a+b)}{b+c}+\frac{a(b+c)}{c+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b(c+a)}{a+b}\cdot\frac{c(a+b)}{b+c}\cdot\frac{a(b+c)}{c+a}}=3 ,$$
при што зна за равенство важи ако и само ако
$$\frac{b(c+a)}{a+b}=\frac{c(a+b)}{b+c}=\frac{a(b+c)}{c+a} ,$$
т.е. ако и само ако $ab=bc=ca$, што значи ако и само ако $a=b=c$.

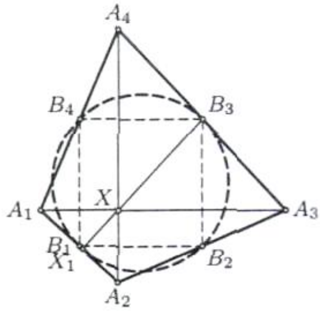
2. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC, а M средината на AC. Нека C_1 е подножјето на нормалата повлечена од C на AB, а H_1 е симетричната точка на H во однос на AB. Нека P,Q и R соодветно се подножјата на нормалите повлечени од точката C_1 на правите AH_1, AC и CB, а M_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQR. Докажи дека симетричната точка на M во однос на точката M_1 лежи на отсечката BH_1.
Решение. Ќе го користиме следново едноставно тврдење.
Лема. Нека во конвексен тетивен четириаголник $A_1A_2A_3A_4$ дијагоналите се сечат по прав агол во точката X. Ако B_i е средина на страната A_iA_{i+1},

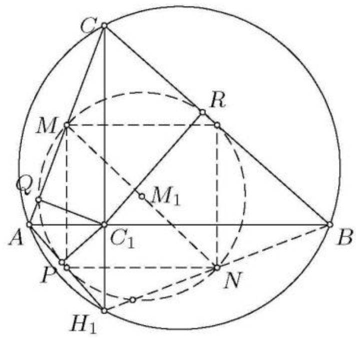
а X_i е подножјето на нормалата повлечена од X кон таа страна ($A_5 = A_1$), тогаш точките $B_i, X_i, i = 1,2,3,4$ лежат на иста кружница.

Доказ. Четириаголникот $B_1B_2B_3B_4$ е правоаголник бидејќи $B_1B_2 \parallel B_3B_4 \parallel A_1A_3$ и $B_2B_3 \parallel B_4B_1 \parallel A_2A_4$. Понатаму,

$\measuredangle B_3XA_3 = \measuredangle A_4A_3A_1 = \measuredangle A_4A_2A_1 = \measuredangle A_1XX_1$,

па затоа точките B_3, X, X_1 се колинеарни, што значи дека точката X_1 лежи на кружницата над дијаметарот B_1B_3, т.е. на опишаната кружница k околу правоаголникот $B_1B_2B_3B_4$. Аналогно се докажува дека $X_i, i = 2,3,4$ лежат на k. ■



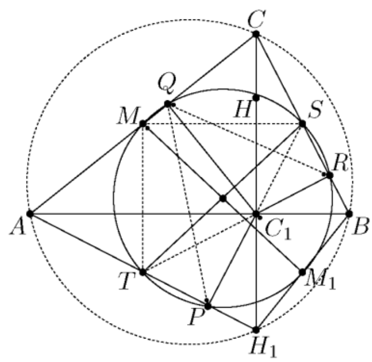


Познато е дека точката H_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Според претходната лема точките P, Q, R лежат на кружницата над дијаметарот MN, каде N е средина на отсечката BH_1. Според тоа, точката N е симетрична на точката M во однос на точката M_1, па затоа лежи на BH_1.

Втор начин. Бидејќи H е ортоцентар на $\triangle ABC$, а точката H_1 е симетрична на точката H во однос на AB, добиваме

$$\measuredangle AH_1B = \measuredangle AHB = 180^\circ - \measuredangle ACB,$$

и затоа H_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека правата C_1P ја сече BC во точката S, а правата C_1R ја сече AH_1 во точката T (цртеж десно). Имаме:



$$\measuredangle TC_1A = \measuredangle BC_1R = \measuredangle BCC_1 = \measuredangle TAC_1,$$

и затоа T е средина на AH_1, а TM како средна линија е паралелна на CH_1. Аналогно S е средина на BC и SM е паралелна на AB.

Од досега изнесеното следува дека $\measuredangle TMS = \measuredangle(AB, CH_1) = 90^\circ$, т.е. точките T, P, R, S, M припаѓаат на кружница ω со дијаметар ST. Од друга страна, $\measuredangle PQR = \measuredangle PQC_1 + \measuredangle RQC_1 = \measuredangle PAC_1 + \measuredangle RCC_1 = BH_1 = \measuredangle PTR$, т.е. точката Q припаѓа на ω и M_1 е дијаметрално спротивната точка на M во ω. Според тоа, четириаголникот MSM_1T е правоаголник, $SM_1 \parallel CH_1, TM_1 \parallel AB$, т.е. M_1 се совпаѓа со средината на отсечката BH_1 и во случајов лежи на неа.

Забелешка. И двета начини на решавање всушност се засноваат на иста идеја, само начинот на испишување е различен.

3. Трака со ширина w го нарекуваме множеството точки во рамнината кои се наоѓаат на или меѓу две паралелни прави кои се на растојание w една од друга. Нека S е множество од n точки во рамнината такво што било кои три точки од множеството S може да се покријат со трака со ширина 1. Докажи, дека S може да се покрие со трака со ширина 2.

Решение. Меѓу сите триаголници со темиња во S, го разгледуваме триаголникот кој има најголема плоштина, и нека тоа е $\triangle ABC$. Нека A', B', C' се симетричните точки на точките A, B, C во однос на средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Тврдиме дека сите точки на множеството S лежат внатре или на страните на $\triangle A'B'C'$. Навистина, ако $X \in S$ е надвор од $\triangle A'B'C'$, тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме дека X и BC се на различни страни од правата $B'C'$, па затоа $\triangle BCX$ има поголема плоштина од $\triangle ABC$, што е противречност. Триаголникот ABC може да се покрие со трака со ширина 1, па затоа триаголникот $A'B'C'$ може да се покрие со трака со ширина 2, бидејќи е хомотетична слика на $\triangle ABC$ со коефициент на хомотетија 2. Оваа трака го покрива множеството S.

4. Нека $n \geq 2$ е природен број. Со $f(n)$ да го означиме збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на n и кои не се заемно прости со n. Докажи, дека $f(n+p) \neq f(n)$, за секој $n \geq 2$ и за секој прост број p.

Решение. Ненегативни цели броеви кои не се заемно прости со n и кои се помали или еднакви на n има $n+1-\varphi(n)$. Понатаму, ако r е таков број, тогаш и $n-r$ е таков број, па затоа важи $f(n) = \frac{1}{2}n(n+1-\varphi(n))$. Нека претпоставиме дека $f(n+p) = f(n)$ за некој природен број n и прост број p. Тогаш го добиваме равенството

$$n(n+1-\varphi(n)) = (n+p)(n+p+1-\varphi(n+p)) . \qquad (1)$$

Ако $\mathrm{NZD}(n,p)=1$, тогаш $n+p$ е делител на $n+1-\varphi(n)<n$, што не е можно. Нека $n=pt, t\in\mathbb{N}$ и (1) да го запишеме во видот

$$t(tp+1-\varphi(tp)) = (t+1)(tp+p+1-\varphi(tp+p)) . \qquad (2)$$

Да допуштиме дека p е делител на t и нека $t=ps, s\in\mathbb{N}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(t,t+1)=\mathrm{NZD}(p,t+1)=1$, имаме

$$t+1 \mid pt+1-\varphi(pt) = (p+1)(t+1)-p-t-p\varphi(t) ,$$

од каде следува дека $t+1 \mid p(1+s+\varphi(t))$, па затоа $t+1 \mid 1+s+\varphi(t)$. Но,

$$1+s+\varphi(t) < 1+t+t < 2(t+1)$$

и затоа $t+1=1+s+\varphi(t)$. Тогаш $t+1=pt+1-\varphi(pt)$ и од (2) добиваме

$$t = pt+p+1-\varphi(p(t+1)) = pt+p+1-(p-1)\varphi(t+1) .$$

Последното равенство, разгледано по модул $p-1$ дава $p-1 \mid 2$, па затоа $p=2$ или $p=3$. Ако $p=2$, тогаш $t=2t+3-\varphi(t+1)>t+2$, а ако $p=3$, добиваме $t=3t+4-2\varphi(t+1)>t+2$, што и во двата случаја е противречност. Според тоа, $\mathrm{NZD}(p,t)=1$.

Ако $p \mid t+1$, т.е. $t+1=pq, q\in\mathbb{N}$, тогаш аналогно како погоре добиваме $t+1 \mid (p-1)(\varphi(t)+1))$. Заменуваме $(p-1)(\varphi(t)+1)=(t+1)u, u\in\mathbb{N}$ и добиваме $t(p-u)=pt+p+1-p\varphi(t+1)$. Според тоа, $p \mid 1+tu=1-u+pqu$, т.е. $p \mid u-1$. Меѓутоа, $u=\frac{(p-1)(\varphi(t)+1)}{t+1}<p-1$, па затоа важи $u=1$. Тогаш $t+1=(p-1)(\varphi(t)+1)$ е непарен, а од друга страна од $1+q=\varphi(t+1)$ следува дека q е непарен, што значи дека $t+1=pq$ е непарен. Последното противречи на фактот дека $t+1$ не може да има два непарни делители од видот p и $p-1$, а во случајот $p=2$ би добиле $t+1 \mid \varphi(t)+1<t+1$, што не е можно.

Сега, бидејќи $\mathrm{NZD}(p,t)=\mathrm{NZD}(p,t+1)=1$ од (2) следува

$$t(tp+1-(p-1)\varphi(t)) = (t+1)(tp+p+1-(p-1)\varphi(t+1)) ,$$

односно

$$\varphi(t+1)-\varphi(t) = \frac{2pt+p+1}{t(p-1)} - \frac{\varphi(t+1)}{t} . \qquad (3)$$

Бидејќи

$$\frac{2pt+p+1}{t(p-1)} - \frac{\varphi(t+1)}{t} > \frac{2(p-1)t}{t(p-1)} - 1 = 1$$

имаме $t\geq 4$ и бројот $\varphi(t+1)-\varphi(t)$ е парен (како разлика на два парни броја). Освен тоа $\frac{2pt+p+1}{t(p-1)} - \frac{\varphi(t+1)}{t} < \frac{2p+1}{p-1} < 4$ кога $p\geq 3$, а за $p=2$ доби-

ваме $\frac{5t+1-\varphi(t)}{t} < 4$. Според тоа, $\varphi(t+1)-\varphi(t)=2$. Од последното равенство и од $t \geq 4$ следува дека точно еден од броевите $\varphi(t+1)$ и $\varphi(t)$ не е делив со 4 (т.е. дава остаток 2 при делење со 4). Тоа е можно ако и само ако точно еден од броевите t и $t+1$ е еднаков на 4, q^k или $2q^k$, каде q е непарен прост број (конгруентен со 3 по модул 4) и $k \in \mathbb{N}$.
Освен тоа со помош на $\varphi(t+1)-\varphi(t)=2$ од (3) ги добиваме равенствата

$$\varphi(t+1) = \frac{2pt+p+1}{p-1} - 2t = \frac{2t+p+1}{p-1} \text{ и } \varphi(t) = \varphi(t+1) - 2 = \frac{2t-p+3}{p-1}. \qquad (4)$$

Да забележиме дека, $\varphi(q^k) = (q-1)q^{k-1} \geq \frac{2}{3}q^k$. Имаме и $p \geq 7$, бидејќи во спротивно добиваме $t > \varphi(t) = 2t+1$ за $p=2$, $t > \varphi(t) = t$ за $p=3$, а за $p=5$ добиваме дека $2\varphi(t) = t-1$ и $2\varphi(t+1) = t+3$, што лесно доведува до противречност. Со помош на овие оценки добиваме противречност во секој одделен случај.
Случај 1. Ако $t = q^k$ или $t = 2q^k$, тогаш

$$4q^k \leq (p-1)q^{k-1}(q-1) \leq 4q^k - p + 3 \leq 4q^k - 2,$$

што не е можно.
Случај 2. Ако $t+1 = q^k$ или $t+1 = 2q^k$, тогаш за $p=7$ добиваме

$$3q^{k-1}(q-1) = q^k + 4 \text{ или } 2q^k + 4.$$

Сега од $\mathrm{NZD}(q,4)=1$ следува $k=1$ и лесно се гледа дека единствена можност е $q=7$ и соодветно $t+1=14$. Но последното противречни на второто равенство во (4). Конечно, ако $p \geq 11$ имаме

$$(p-1)(q^k - q^{k-1} - 1) = 2q^k \text{ или } 4q^k,$$

од каде следува

$$\frac{20q^k}{3} - 10 \leq (p-1)(q^k - q^{k-1} - 1) \leq 4q^k, \text{ т.е. } 4q^k \leq 15,$$

што е можно само за $q=3, k=1$ и соодветно $t+1=6$, а тоа противречи на второто равенство во (4).