XXI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII.1. Ако збирот на два цели броја е делив со 10, докажи дека квадратите на двата броја завршуваат со иста цифра.

Решение: Нека m и n се цели броеви. а) Ако m и n завршуваат на 0, тогаш нивиниот збир завршува на 0 и нивните квадрати завршуваат на 0. б) Ако бројот m завршува со цифрата x, тогаш n ќе завршува со цифрата 10-x. Бројот m^2 завршува со последната цифра на бројот x^2, а бројот n^2 завршува со последната цифра на бројот $(10-x)^2$. Бидејќи $(10-x)^2=100-20x+x^2=10(10-2x)+x^2$, следи дека бројот n^2 завршува со последната цифра на бројот x^2.

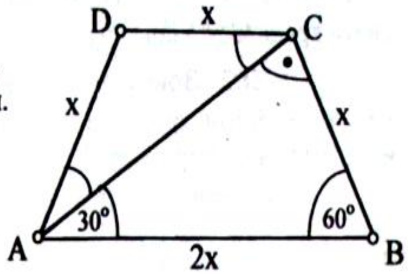
VII.2. Четворица работници треба да завршат една работа. Првиот, вториот и третиот работник можат заедно да ја завршат работата за 6 часа. Ако првиот, вториот и четвртиот работат заедно, работата ќе ја завршат за 7,5 часа, а третиот и четвртиот за 10 часа. За колку часови ќе ја завршат работата ако работат сите заедно?

Решение: Нека секој од нив работата може да ја заврши (редоследно) за a, b, c и d часови. Следува: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2}{15}$ и $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{10}$. Од збирот на левите и десните страни на равенствата имаме: $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{d}=\frac{12}{30}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{5}$; односно сите заедно за 5 часа.

VII.3. Нека во еден триаголник важи равенството $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}=c$ каде h_a, h_b и h_c се висини, а c е страна на тој триаголник. Одреди ја големината на еден од внатрешните агли на тој триаголник.

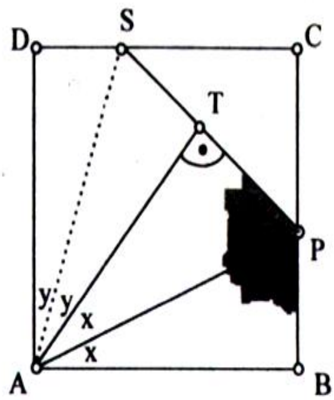
Решение: Познато е дека $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2P$, т.е. $h_a = \frac{2P}{a}$; $h_b = \frac{2P}{b}$; $h_c = \frac{2P}{c}$. Ако замениме во даденото равенство имаме: $\frac{2P \cdot c}{a \cdot b} = c$; $P = \frac{a \cdot b}{2}$, т.е. триаголникот е правоаголен. Еден агол е 90^0.

VII.4. Во трапезот ABCD дијагоналата AC е нормална на кракот BC и е симетрала на аголот во темето A. Пресметај ја должината на основата AB, ако $\measuredangle ABC = 60^o$, а периметарот на трапезот е 25 cm.



Решение: Бидејќи AC е симетрала на аголот A, имаме: $\measuredangle DAC = \measuredangle CAB$, а $\measuredangle DCA = \measuredangle CAB$ - како наизменични агли. Следува дека $\measuredangle DAC = \measuredangle DCA$, т.е. ΔADC е рамнокрак, $\overline{AD} = \overline{DC}$. Триаголникот ABC е правоаголен и $\measuredangle CAB = 30^o$, т.е. $\measuredangle DAB = 60^o$, па трапезот е рамнокрак. Основата AB е хипотенуза во правоаголниот триаголник ABC, со агол од 30^o; $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. Според тоа, $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC} = x$ и $\overline{AB} = 2x$ имаме $x+x+x+2x=25$, $x=5$; $\overline{AB} = 2 \cdot 5 = 10$ cm.

VII.5. Во квадратот ABCD е избрана точка P на страната BC и точка S на страната CD, така што $\measuredangle APB = \measuredangle APS$. Одреди ја големнината на аголот PAS.



Решение: Нека T е подножна точка на нормалата од темето A кон отсечката PS. $\Delta ABP \cong \Delta ATP$ (заедничка хипотенуза и $\measuredangle APB = \measuredangle APT$). Следи: $\measuredangle BAP = \measuredangle PAT = x$; $\Delta ATS \cong \Delta ADS$ (заедничка хипотенуза и еднакви катети). Следи $\measuredangle TAS = \measuredangle SAD = y$; $2x+2y=90^o$, $x+y=45^o$, односно $\measuredangle PAS = 45^o$.

VIII.1. Патот од Гостивар до Кичево се состои од хоризонтални делови, од угорници и од удолници. Патот го поминува велосипедист, при што неговата брзина на хоризонталниот дел од патот е 10 km на час, на угорнината 8 km на час, а на удолнината 16 km на час.Патот од Гостивар до Кичево велосипедистот го поминува за 6 часа, а обратно за 5 часа. Ако хоризонталните делови се вкупно 17,5 km, одреди ја должината на патот меѓу двата града.

Решение: Нека x е должината на угорнините, а y должината на удолнините. Времето на велосипедистот во двете насоки може да се претстави со равенките: $\frac{17,5}{10}+\frac{x}{8}+\frac{y}{16}=6$ и $\frac{17,5}{10}+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}=5$. Од решението на системот добиваме x=28 km, y=12 km. Растојанието меѓу двата града е 57,5 km.

VIII.2. Збирот на сите природни броеви од 1 до n е еднаков на трицифрен број со еднакви цифри. Колку природни броеви имало при собирањето?

Решение: Според условот на задачата имаме: $1+2+3+...+n=\overline{aaa}=a\cdot 111$. Познато е дека $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Значи, $\frac{n(n+1)}{2}=a\cdot 111$; $n(n+1)=a\cdot 222$; $n(n+1)=a\cdot 6\cdot 37$. Од левата страна страна имаме производ на два последователни природни броеви, значи едниот број е 37, а другиот е 36, бидејќи е делив со 6, т.е. $n=a\cdot 6=36$. Значи, при собирањето имало 36 природни броја, а нивниот збир е 666.

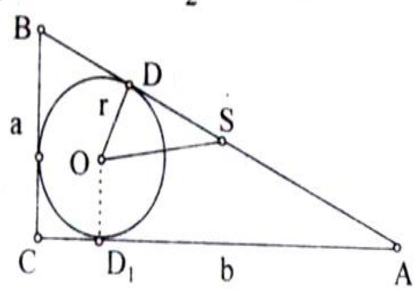
VIII.3. Катетите на еден правоаголен триаголник се 3 cm и 4 cm. Одреди го растојанието помеѓу центрите на впишаната и опишаната кружница на траголникот.

Решение: $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=5$; $P=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{12}{2}=6cm$, a $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=6cm$.

Познато е дека радиусот на опишаната кружница $R=\frac{1}{2}\overline{AB}=2,5$ cm, a $P=s\cdot r$,

т.е. $r=\frac{P}{s}=\frac{6}{6}=1cm$

$\overline{AD_1}=\overline{AD}=4-1=3$ cm.

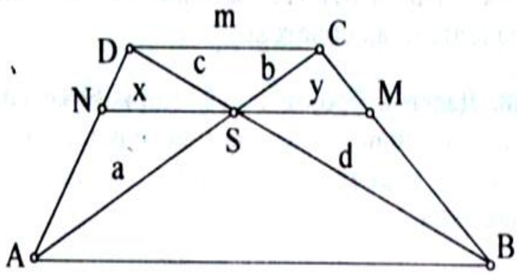


$\overline{DS} = \overline{AD} - \overline{AS}$; $\overline{DS} = 3 - 2.5 = 0.5$ cm.Од ΔDOS следува: $\overline{OS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DS}^2$;

$\overline{OS}^2 = 1^2 + 0.5^2 = 1 + 0.25 = 1.25$. $\overline{OS} = \sqrt{1,25} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

VIII.4. Во еден трапез ABCD дијагоналите AC и BD се сечат во точката S. Низ точката S е повлечена права паралелно со основите, која ги сече краците на трапезот во точките M и N. Докажи дека точката S е средишна точка на отсечката MN.

Решение: Нека $\overline{AS} = a$; $\overline{SC} = b$; $\overline{SD} = c$; $\overline{BS} = d$; $\overline{NS} = x$; $\overline{MS} = y$; $\overline{CD} = m$ $\Delta ABS \sim \Delta CSD$; $\Delta ACD \sim \Delta ASN$; $\Delta BCD \sim \Delta BSM$ (според Талесовата теорема)

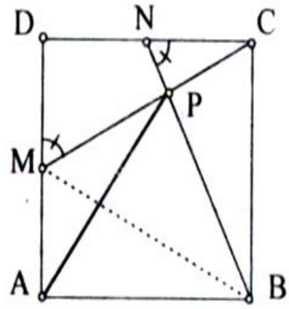


$\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{d}$; $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{m}{x}$; $\dfrac{d+c}{d} = \dfrac{m}{y}$.

$\dfrac{m}{x} = \dfrac{a+b}{a} = 1 + \dfrac{b}{a} = 1 + \dfrac{c}{d} = \dfrac{d+c}{d} = \dfrac{m}{y}$. $\dfrac{d+c}{d} = \dfrac{m}{y}$. Следи $x = y$.

VIII.5. Во квадратот ABCD, точката M е средишна точка на страната AD, а N средишна точка на CD. Отсечките BN и CM се сечат во точката P. Докажи дека отсечката AP е еднаква на страната на квадратот.

Решение: $\Delta BCN \cong \Delta CDM$ (правоаголни и имаат еднакви катети). $\measuredangle DMC = \measuredangle CNB$. Бидејќи $\measuredangle DMC + \measuredangle DCM = 90^0$, следува дека и $\measuredangle PNC + \measuredangle NCP = 90^0$, т.е. $\measuredangle NPC = 90^0$, т.е. $CM \perp BN$. Следи дека четириаголникот ABPM е тетивен. Според тоа $\measuredangle ABM = \measuredangle APM$ (периферни агли над ист лак)



$\Delta ABM \cong \Delta CBN$ (еднакви катети), следи $\measuredangle ABM = \measuredangle CBN$, т.е. $\measuredangle APM = \measuredangle CBN \cdot \measuredangle ABP = 90^0 - \measuredangle CBN = 90^0 - \measuredangle APM = \measuredangle BPA$. Следи, триаголникот ABP е рамнокрак т.е. $\overline{AP} = \overline{AB}$