Površina trokuta, četverokuta, peterokuta i volumen fulerena

Darko Veljan, Zagreb

Uvod

Nekome se može učiniti da jednom kada znamo izračunati površinu trokuta, problem računanja površine nekog poligona svodi se na zbroj površina trokuta na koje je poligon isjeckan. No, nije baš tako. Odgovor uvelike ovisi o tome koje podatke o poligonu znamo. Evo, primjerice, jednog zadataka.

Zadatak 1. Izračunajte površinu P (konveksnog) četverokuta ako su mu duljine stranica redom 5, 6, 7, 8, a produkt duljina dijagonala jednak 85. (*Odgovor*: $P = 42$.)

Navedimo uvodno još dva tipična zadatka s kakvim ćemo se baviti u ovom članku.

Zadatak 2. Zamislimo da obilazimo oko zidova zgrade oblika konveksnog peterokuta (ili "pentagona"). Pretpostavimo da smo nekako saznali da su tlocrtne površine trokuta s tri uzastopna vrha redom 10, 20, 30, 40 i 40 m^2. Kolika je tlocrtna površina P "pentagona"? (*Odgovor*: $P = 100\ \mathrm{m}^2$.)

Zadatak 3. Odredite oplošje O i volumen V pravilnog dodekaedra brida duljine 1. (*Odgovor*: $O \approx 20.6457$, $V \approx 7.6631$.)

Napomenimo da su pitanja računanja površina vrlo stara i netrivijalna. Uostalom, tek je Newton u 17. st. s otkrićem integralnog računa dao principijelan odgovor na pitanje: "Kako izračunati površinu?" A o volumenu da i ne pričamo!

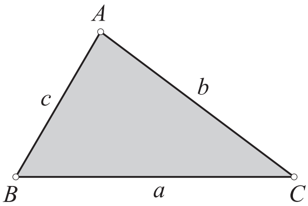
Heronova, Bretschneiderova i Brahmaguptina formula

Počnimo s poznatom Heronovom formulom za računanje površine $\triangle$ trokuta pomoću duljina stranica a, b, c. Iako se ta formula pripisuje Heronu iz Aleksandrije (iz 1. st. pr. Kr.), pouzdano se zna da ju je poznavao i Arhimed (tri stoljeća ranije).

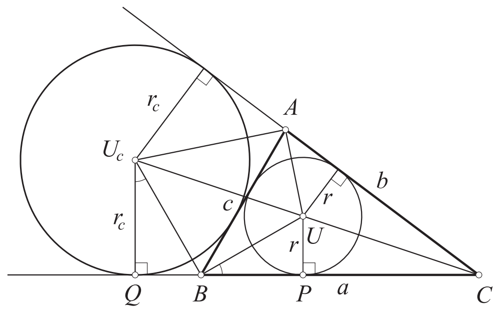
Heronova formula

Površinu $\triangle = p(\triangle ABC)$ trokuta (sl. 1) čije su duljine stranica a, b, c i poluopseg $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ računamo ovako:

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$



Slika 1.



Slika 2.

Dokaz Heronove formule. Evo jednog kratkog i lijepog dokaza. Označimo s r polumjer upisane, a s r_c polumjer pripisane kružnice trokuta, kao na sl. 2, sa središtima redom U i U_c. Tada je očito

$$\triangle = p(\triangle BCU) + p(\triangle CAU) + p(\triangle ABU) = \frac{1}{2}(ar + br + cr) = rs.$$

Slično,

$$\triangle = p(\triangle BCU_c) + p(\triangle CAU_c) - p(\triangle ABU_c) = \frac{1}{2}(ar_c + br_c - cr_c) = r_c(s - c).$$

Dakle, $\triangle^2 = rr_c s(s - c)$. Neka su P i Q ortogonalne projekcije od U i U_c na BC. Tada je (kutovi s okomitim kracima!): $\triangle PBU \sim \triangle QU_cB$. Lako se vidi (uvjerite se sami u to!) da je $|BP| = s - b$ i $|BQ| = s - a$. Zato je $r : (s - b) = (s - a) : r_c$, pa je $rr_c = (s - a)(s - b)$. Uvrštavanjem dobivamo Heronovu formulu

$$\triangle^2 = rr_c s(s - c) = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

□

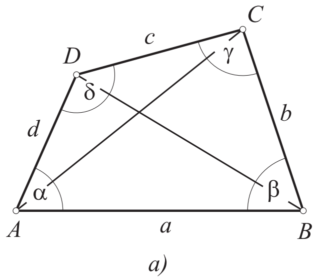
Napomena 1. Pokazuje se ([1]) da je Heronova formula ekvivalentna Pitagorinom poučku. Danas se znade preko 400 dokaza Pitagore, pa stoga ima i preko 400 dokaza Heronove formule. Neke od njih vidi u [2]. Evo još dva njezina (ekvivalentna) zapisa bez korijena (izvedite ih!):

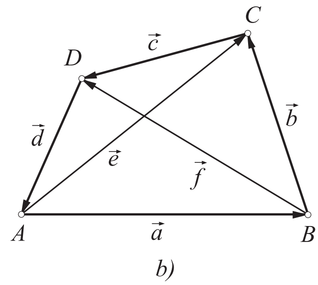
$$(4\triangle)^2 = 2[(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2] - (a^4 + b^4 + c^4),$$
$$(4\triangle)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Ako je trokut pravokutan onda je $a^2 + b^2 = c^2$ i $4\triangle = 2ab$, pa možemo reći da "Heron mjeri otklon od pravokutnosti".

Bretschneiderova, Brahmaguptina i još neke formule za četverokut

Sada ćemo izvesti formule za površinu četverokuta. Neka je $ABCD$ (konveksan) četverokut s duljinama stranica a, b, c, d i dijagonala e, f, te unutarnjim kutovima α, β, γ, δ, kao na sl. 3a). Izvest ćemo nekoliko formula za površinu $\square = p(ABCD)$ četverokuta $ABCD$ i posebno za tetivni četverokut.





Slika 3.

Bretschneiderova formula (oko 1850. g.):

$$(4\square)^2 = (2ef)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \qquad (*)$$

Dokaz. Vektorizirajmo stranice i dijagonale četverokuta kao na sl. 3b). Tada je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{b}+\vec{c}$. Znamo da je $2\square = |\vec{e}\times\vec{f}|$. Prisjetimo se da je vektorski produkt $\vec{e}\times\vec{f}$ vektor okomit na $\vec{e}$ i $\vec{f}$, modula jednakog površini paralelograma razapetog s $\vec{e}$ i $\vec{f}$, a vektori $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{e}\times\vec{f}$ čine desni sustav; o detaljima vidi u [2]. Tada imamo (rabeći osnovna svojstva vektorskog i skalarnog produkta):

$$4\square^2 = (\vec{e}\times\vec{f})\cdot(\vec{e}\times\vec{f}) = (\vec{e}\vec{e})\cdot(\vec{f}\vec{f}) - (\vec{e}\vec{f})^2 = e^2f^2 - (\vec{e}\vec{f})^2.$$

Izračunajmo sada skalarni produkt $\vec{e}\vec{f}$. Imamo,

$$\begin{aligned} 2(\vec{e}\vec{f}) &= 2(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c}) = 2\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) - 2\vec{b}(\vec{a}+\vec{d}) \\ &= 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{b}\vec{d} = (\vec{a}+\vec{c})^2 - \vec{a}^2 - \vec{c}^2 - (\vec{b}+\vec{d})^2 + \vec{b}^2 + \vec{d}^2 \\ &= -a^2 - c^2 + b^2 + d^2. \end{aligned}$$

Uvrstimo li ovo u gornju formulu za $4\square^2$, dobivamo Bretschneiderovu formulu. □

Napomena 2. Riječima, Bretschneiderova formula glasi ovako. Kvadrat četverostruke površine četverokuta je kvadrat dvostrukog produkta dijagonala, umanjen za kvadrat ciklički alterniranog zbroja kvadrata njegovih stranica. Uočimo da se Bretschneiderova formula svodi na Heronovu kada četverokut degenerira u trokut. Naime, ako je npr. na sl. 3 a) jedna stranica jednaka nuli, npr. $d=0$, onda je $e=c$, $f=a$, pa Bretschneiderova formula prelazi u

$$(4\square)^2 = (2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2,$$

a to je Heronova formula u obliku posljednje formule iz napomene 1.

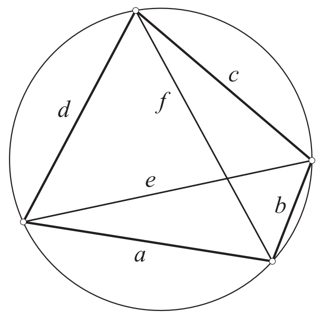
Ako je četverokut deltoid, tj. ima okomite dijagonale, onda je $2\square = ef$. Stoga Bretschneider mjeri otklon od "deltoidnosti".

Sada pogledajmo na što se svodi Bretschneiderova formula kada je četverokut tetivni. U tu svrhu prvo dokažimo sljedeći poučak.

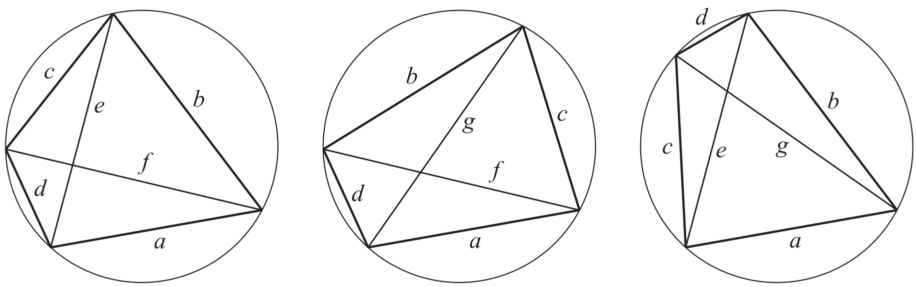
Ptolemejev[2] **poučak.** U tetivnom je četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica, ili prema oznakama na sl. 4:

$$ef = ac + bd. \qquad (**)$$

Dokaz. Promotrimo tri različita tetivna četverokuta sa stranicama a, b, c, d s opsegom $2s$, polumjerom opisane kružnice R i površinom P. Neka su e, f, g duljine dijagonala kao na sl. 5. Koristimo poznatu formulu za površinu trokuta (sa sl. 1): $4R\triangle = abc$. (*Dokaz.* Sličnost $\triangle ABA' \sim \triangle AA_1C$ povlači $c : v_a = 2R : b$, pa iz $2\triangle = av_a$ slijedi $4R\triangle = abc$, pritom je A' nožište visine iz A, a $\overline{AA_1}$ promjer opisane kružnice.) Primijenimo tu formulu na šest trokuta podijeljenih dijagonalama e, f, g i dobivene rezultate (po dva za svaku dijagonalu) zbrojimo.



Slika 4.



Slika 5.

Dobivamo

$$4RP = (ab + cd)e = (ad + bc)f = (ac + bd)g.$$

Dijeljenjem s efg slijedi

$$\frac{ab + cd}{fg} = \frac{ad + bc}{eg} = \frac{ac + bd}{ef} = \frac{4RP}{efg} := k,$$

gdje je k neka konstanta. No, za $d = 0$ je $e = c$, $f = a$, $g = b$, pa je $k = 1$. Odavde slijedi Ptolomejev poučak. $\square$

Uvrstimo li Ptolemejevu formulu $(**)$ u Bretschneiderovu $(*)$, nakon malo sređivanja, dobijemo poznatu **Brahmaguptinu formulu** iz 7. stoljeća za površinu $\square$ tetivnog četverokuta s duljinama stranicama a, b, c, d i poluopsegom s:

$$\square = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Uočimo da je $(4RP)^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$, te $e^2 = \dfrac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$.

[2] Klaudije Ptolemej (oko 90. – oko 168.) starogrčki je matematičar, astronom i geograf a djelovao je u Aleksandriji. Daleki je potomak Ptolemeja I., generala vojske Aleksandra Velikog i kasnije egipatskog kralja kojeg je Euklid podučavao geometriju. Nakon što je postao nestrpljiv upitao je Euklida ima li neki brži i jednostavniji način da mu objašnjava geometriju, na što mu je ovaj odgovorio: "Nema kraljevskog puta u geometriju."

I konačno, formula za radijus $R^2 = \dfrac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$. Napomenimo da se površina $\square$ bilo kojeg četverokuta može, uz oznake kao na sl. 3 a), izraziti i ovako

$$\square = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}. \qquad (+)$$

Dokaz započinje ovako. Imamo $2\square = ad\sin\alpha + bc\sin\gamma$. Sada se uporabi kosinusov poučak: $a^2+d^2-2ad\cos\alpha = b^2+c^2-2bc\cos\gamma$. Dalje nastavite sami ili pogledajte [2]. Uočite da se $(*)$ može i ovako zapisati

$$\square = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)}. \qquad (++)$$

Usporedimo li formule $(*)$ i $(+)$ za površinu $\square$ četverokuta, lako se dobiva tzv. **kosinusov poučak za četverokut** kojim se izražava produkt dijagonala

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma). \qquad (+++)$$

Posebno, ako je četverokut tetivni, što je ekvivalentno s $\alpha+\gamma=\pi$, iz $(+++)$ dobivamo još jednom Ptolemejev poučak, kao i općenito $ef \le ac+bd$.

Konačno evo još jedne lijepe formule za površinu $\square$ četverokuta (uz standardne oznake sa sl. 3 a)):

$$4\square = \frac{(a+b+c+d)^2}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}} - \frac{(a-b+c-d)^2}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\delta}{2}}.$$

Ova se formula zove *"Russian killer"* (vidi [3]), a razlog za njegovo ubojito ime je jer je bio zadan kao zadatak na jednoj ruskoj matematičkoj olimpijadi i tada je "poubijao" skoro sve natjecatelje.

Evo ukratko ideje dokaza. Uzmimo $e = |AC| = 1$. Označimo $\theta_1 = \sphericalangle CAD$, $\theta_2 = \sphericalangle ACD$, $\theta_3 = \sphericalangle ACB$, $\theta_4 = \sphericalangle CAB$ i kompleksne brojeve $z_k = e^{i\theta_k}$, $k=1,2,3,4$. Tada je

$$\sin\theta_k = -\frac{i}{2}\left(e^{i\theta_k} - \frac{1}{e^{i\theta_k}}\right) = -\frac{i}{2}\left(z_k - \frac{1}{z_k}\right),$$

$$\sin\beta = \sin(\theta_3+\theta_4) = -i\frac{(z_3z_4)^2-1}{2z_3z_4},$$

$$\sin\delta = \sin(\theta_1+\theta_2) = -i\frac{(z_1z_2)^2-1}{2z_1z_2}.$$

Iz poučka o sinusima je $a = \dfrac{\sin\theta_3}{\sin\beta} = \dfrac{(z_3^2-1)z_4}{(z_3z_4)^2-1}$, i slične izraze dobivamo za b, c, d.

Nadalje,

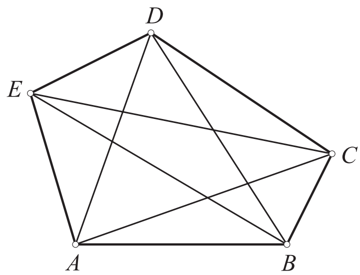
$$e^{\frac{i\alpha}{2}} = e^{\frac{i(\theta_1+\theta_4)}{2}} = \sqrt{z_1z_2}, \qquad e^{\frac{i\beta}{2}} = e^{\frac{i(\pi-\theta_3-\theta_4)}{2}} = \frac{i}{\sqrt{z_3z_4}},$$

$$e^{\frac{i\gamma}{2}} = e^{\frac{i(\theta_2+\theta_3)}{2}} = \sqrt{z_2z_3}, \qquad e^{\frac{i\delta}{2}} = e^{\frac{i(\pi-\theta_1-\theta_2)}{2}} = \frac{i}{\sqrt{z_1z_2}}.$$

Odavde dobivamo $\cot\dfrac{\alpha}{2} = i\dfrac{z_1z_4+1}{z_1z_4-1}$ i slične izraze za $\cot\dfrac{\beta}{2}$, $\cot\dfrac{\gamma}{2}$, $\cot\dfrac{\delta}{2}$, a iz $\tan\,\theta = \dfrac{1}{\cot\,\theta}$ izraze za $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ itd. Ako sada u formulu $2\square = d\sin\theta_1 + a\sin\theta_4$

uvrstimo gornje vrijednosti, kompjutorskom provjerom, koristeći npr. softverski paket Maple IX, možemo se brzo uvjeriti u ispravnost formule "*Russian killer*".

Gaussova, Robbinsova i još neke formule za peterokut



Slika 6.

Stoljećima su se ljudi bavili geometrijom trokuta i četverokuta. Sada ćemo ukratko prikazati neke netrivijalne činjenice iz geometrije peterokuta i ponešto šesterokuta. Započinjemo s Gaussovom formulom iz 1823. Neka je $ABCDE$ (konveksan) peterokut kao na sl. 6. Ova, začudno lijepa, jednostavna i pomalo zaboravljena formula računa površinu P peterokuta pomoću površina tzv. vršnih trokuta. *Vršni trokut* peterokuta je trokut s tri uzastopna vrha: $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$.

Označimo površinu vršnog trokuta $p(\triangle EAB)$ simbolom (A), površinu $p(\triangle ABC)$ simbolom (B),…, površinu $p(\triangle DEA)$ simbolom (E). Formirajmo cikličke sume c_1 i c_2 ovako:

$$\begin{aligned} c_1 &= (A) + (B) + (C) + (D) + (E), \\ c_2 &= (A)(B) + (B)(C) + (C)(D) + (D)(E) + (E)(A). \end{aligned}$$

Gaussova "pentagon formula". Površina P peterokuta zadovoljava sljedeću kvadratnu jednadžbu

$$P^2 - c_1 P + c_2 = 0. \qquad (\clubsuit)$$

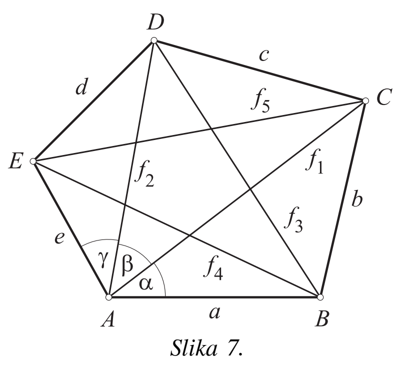
Dokaz. Prvo ćemo dokazati **Mongeovu formulu** koja veže površine svih šest trokutova koji imaju vrh A:

$$(B)(E) + (A)p(\triangle ACD) = p(\triangle ABD)p(\triangle ACE). \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

Napišimo sve površine u formuli $(\clubsuit\clubsuit)$ kao polovicu produkta dviju stranica i sinusa kuta među njima, kao na sl. 7. Tada je $2(B) = 2p(\triangle ABC) = af_1 \sin\alpha$, $2(E) = ef_2 \sin\gamma$, $2(A) = ae\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $2p(\triangle ACD) = f_1 f_2 \sin\beta$, $2p(\triangle ABD) = af_2\sin(\alpha+\beta)$, $2p(\triangle ACE) = ef_1\sin(\beta+\gamma)$. Uvrstimo li ovo u $(\clubsuit\clubsuit)$, nakon skraćivanja s $\frac{1}{2}aef_1f_2$, formula prelazi u identitet

$$\begin{aligned} &\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma) \\ &\quad = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma), \end{aligned}$$

koji se lako provjeri pomoću adicijske formule za sinus. (Uočite da se u ovom obliku adicijske formule pojavljuje samo za sinus!)



Slika 7.

Sada dovršimo dokaz Gaussove formule. U Mongeovu formulu uvrstimo $p(\triangle ACD) = P - (B) - (E)$, $p(\triangle ABD) = P - (C) - (E)$ i $p(\triangle ACE) = P - (B) - (D)$. Nakon sređivanja dobivamo $(\clubsuit)$. $\square$

Napomenimo da je drugo rješenje od (♣) razlika površina originalnog i zvjezdastog peterokuta ("pentagrama" ili peterokrake zvijezde $ADBECA$).

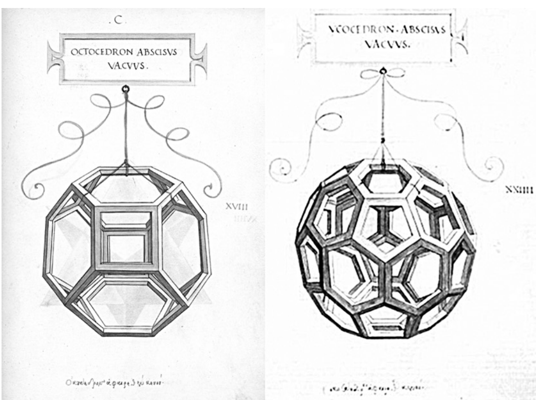
Posljedica. Ako svi vršni trokuti peterokuta $ABCDE$ imaju istu površinu jednaku k, onda je površina P peterokuta jednaka $P = \sqrt{5}\varphi k \approx 3.618k$, gdje je $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ tzv. **zlatni rez** (tj. pozitivno rješenje jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$).

Dokaz. Uvrstimo li u Gaussovu formulu (♣) $(A) = (B) = \ldots = (E) = k$, tvrdnja se dobiva rješavanjem kvadratne jednadžbe $P^2 - 5kP + 5k^2 = 0$. $\square$

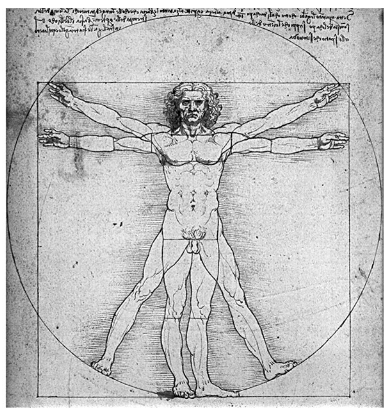
Odavde nije teško izvesti i poznatu formulu za površinu P pravilnog peterokuta duljine stranice a (učinite to sami):

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \approx 1.72a^2.$$

Da zlatni rez $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$ ima duboke veze s pravilnim peterokutom, uočili su još starogrčki matematičari, mudraci i umjetnici, a toj su se temi vratili i renesansni mislioci. Naročito je to budilo maštu Leonarda da Vincija (15. st.) koji je zlatni rez nazvao **božanski omjer** ("De Divina Proportione"). Na sl. 8a) su njegovi crteži u knjizi Luce Paciolia. Znajući da se dijagonala i stranica pravilnog peterokuta nalaze u božanskom omjeru, Leonardo je osmislio čuvenu sliku (sl. 8b) na kojoj su tjeme čovjekove glave i vršci prstiju na ispruženim rukama i nogama vrhovi pravilnog peterokuta. A evo primjera iz prirode: u svakoj je košnici omjer brojeva pčela radilica i trutova 1.618. O mnogim drugim zanimljivim aspektima božanskog omjera laicima pokušava tumačiti Dan Brown u svjetskoj uspješnici [4].



a)



b)

Slika 8.

Nakon ovog malog izleta u umjetnost, koji još jednom potvrđuje bliskost matematike i umjetnosti, vratimo se u našu "običnu matematiku".

Jasno je da površinu P peterokuta sa sl. 7 možemo dobiti zbrajanjem, rabeći Bretschneiderovu i Heronovu formulu, primjerice,

$$4P = \sqrt{(2f_2f_5)^2 - (c^2 - d^2 + e^2 - f_1^2)^2} + \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - f_1^2)^2}. \qquad (\heartsuit)$$

Drugi način je da zbrojimo površine trokuta rabeći Heronovu formulu:

$$\begin{aligned} 4P = &\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - f_1^2)^2} + \sqrt{(2f_1f_2)^2 - (f_1^2 + f_2^2 - c^2)^2} \\ &+ \sqrt{(2de)^2 - (d^2 + e^2 - f_2^2)^2}. \end{aligned} \qquad (\heartsuit\heartsuit)$$

Ali, eliminacija korijena u zbroju tri korijena je puno teža nego u zbroju dva korijena (pokušajte! – a tek četiri, pet ili šest korijena!). No, uočite da u $(\heartsuit)$ osim stranica rabimo tri dijagonale, a u $(\heartsuit\heartsuit)$ samo dvije.

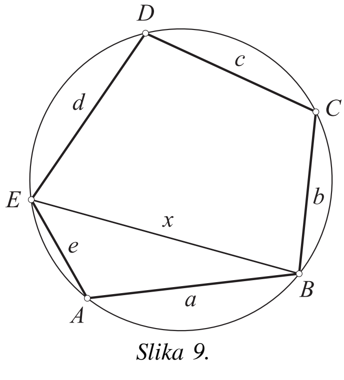
A kako dobiti površinu P tetivnog peterokuta samo pomoću duljina stranica, dakle analogon Brahmagupte (ili Herona)?

Odgovor na ovo, samo naoko, naivno pitanje nije lako dobiti. Prvi je to učinio D. Robbins 1995. g. (vidi [6]). Nedavno smo mi dali drugačiji i izravniji dokaz (vidi [7]). U dokazu se rabi kompjutorska algebra. Ideja je da se algebarski eliminiraju sve duljine dijagonala. Preostaje algebarska jednadžba 7. stupnja u kvadratu $(4P)^2$ površine peterokuta. Evo kako se najkraće može napisati Robbinsova formula. Neka su e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 elementarne simetrične funkcije kvadrata a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 duljina stranica tetivnog peterokuta, kao na sl. 9. Točnije, e_k je zbroj produkata od po k faktora. Dakle, $e_1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$, $e_2 = a^2b^2 + a^2c^2 + \ldots + d^2e^2$, $e_3 = a^2b^2c^2 + \ldots + c^2d^2e^2$, $e_4 = a^2b^2c^2d^2 + \ldots + b^2c^2d^2e^2$, $e_5 = a^2b^2c^2d^2e^2$. Dalje, označimo $H := (4P)^2 + e_1^2 - 4e_2$ (ovo je za "Heron") i $B := H^2 - 64e_4$ (ovo je za "Brahmagupta"), te $H_1 := e_1H + 8e_3$. Tada imamo **Robbinsovu formulu**

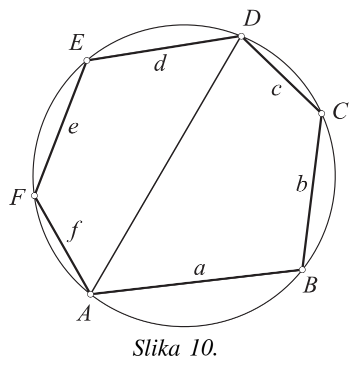
$$R := B^2[(4P)^2B + H_1^2] - 128e_5[16H_1^3 + 18(4P)^2H_1B + 2^73^3e_5(4P)^4] = 0.$$

Uočimo da, ako tetivni peterokut degenerira u četverokut, tj. ako je npr. $e = 0$, onda je $e_5 = 0$ i Robbinsova se formula svodi na Brahmaguptinu $B = 0$. Slična formula može se dobiti za šesterokut, kao i za kvadrat radijusa R^2 opisane kružnice pomoću duljina stranica peterokuta (ili šesterokuta). I taj je rezultat jednadžba 7. stupnja, čiji se koeficijenti također mogu napisati pomoću elementarnih simetričnih funkcija od $a^2, \ldots, e^2$. Ali kako ta formula ima osam redaka, nećemo je navoditi (zainteresiranog čitatelja upućujemo na [7]).

No osnovna ideja dokaza Robbinsove formule je algebarska jednadžba 7. stupnja kojom se izražava duljina dijagonale x pomoću duljina $a, \ldots, e$ stranica tetivnog peterokuta (vidi sl. 9).



Slika 9.



Slika 10.

Jednadžba za dijagonalu x glasi ovako:

$$(x^2 - a^2 - e^2)^2(bx + cd)(cx + bd)(dx + bc) = (ae)^2[x^3 - (b^2 + c^2 + d^2)x - 2bcd]^2.$$

Ona se dobiva tako da se izjednači R^2 za $\triangle ABE$ pomoću stranica a, e, x, te za četverokut $BCDE$ pomoću stranica b, c, d, x. Robbinsova se formula dobiva eliminacijom x i R iz nekoliko jednadžbi ovakvog tipa (dakako rabeći kompjutorsku algebru).

Kombinacijom Gaussove i Robbinsove formule dobivamo, pomalo iznenađujuće, da je površina tetivnog peterokuta racionalna funkcija od kvadrata duljina stranica i površina vršnih trokutova peterokuta (jer u Robbinsa uvrstimo Gaussa: $P^2 = c_1P - c_2$).

Da izračunamo površinu $A = p(ABCDEF)$ tetivnog šesterokuta kao na sl. 10, razdijelimo ga dijagonalom duljine x, čime se šesterokut raspada na dva tetivna četverokuta. Izjednačavanjem R^2 iz oba četverokuta, dobivamo jednadžbu 7. stupnja za x pomoću stranica. Tada se, slično kao za peterokut i ovdje (uz neke trikove) kompjutorski dobiva jednadžba 14. stupnja za $(4R)^2$ i $(4A)^2$ pomoću kvadrata stranica.

Napomena 3. Nedavno je dokazano da i općenito za površinu A tetivnog n-terokuta postoji polinomska jednadžba za $(4A)^2$, čiji su koeficijenti simetrični polinomi kvadrata duljina stranica n-terokuta. Najmanji stupanj takvog polinoma je $\triangle_k$ za $n = 2k+1$, a $2\triangle_k$ za $n = 2k+2$, gdje je

$$\triangle_k = \frac{1}{2}\left[(2k+1)\binom{2k}{k} - 2^{2k}\right] = \sum_{i=0}^{k-1}(k-i)\binom{2k+1}{i},$$

a to je ukupni broj $(2k+1)$-terokuta upisanih u kružnicu (bilo konveksnih ili nekonveksnih). Dakle, $\triangle_1 = 1$, $\triangle_2 = 7$, $\triangle_3 = 38$, $\triangle_4 = 187, \ldots$.

Evo jedne zanimljive posljedice naše "geometrije peterokuta". Kao što znamo, iz zadanih veličina a, b, c možemo konstruirati trokut s tim duljinama stranica (dakako, ovdje mislimo na konstrukciju ravnalom i šestarom), pri čemu jedino mora biti ispunjen uvjet nejednakosti trokuta. Slična je stvar s tetivnim četverokutom. Iz a, b, c, d se može naći radijus R i konstruirati ga (vidi [2]). No, tetivni se peterokut sa zadanim duljinama stranica općenito ne može konstruirati. Razlog je u tome što kvadrat radijusa R (ili duljina dijagonale) zadovoljava ireducibilnu (nerastavljivu) jednadžbu sedmog stupnja, a takva se rješenja općenito ne mogu konstruirati (osim u nekim posebnim slučajevima).

Volumen fulerena

Evo i jedne izravne primjene naših rezultata. Navest ćemo je samo opisno i načelno, a odnosi se na računanje obujmova izvjesnih poliedara. Neka je P (konveksni) poliedar upisan u sferu zadanog radijusa R, čije su strane trokuti, četverokuti, peterokuti i šesterokuti. Pretpostavimo da su još jedino poznate duljine bridova poliedra, tj. skup $l = \{a_{ij}\}$ i kombinatorna struktura K poliedra (to samo znači da znamo koja je kojoj susjedna strana, njihovi oblici, brojevi, itd.). Kako izračunati obujam (volumen) $\mathrm{vol}(P)$ u terminima K, l i R? Jedan takav zanimljiv primjer je upisani pentagonalni dodekaedar (ne nužno pravilni) kojem se rub sastoji od 12 peterokuta i svaki od njih je, naravno, tetivni. Takvi poliedri javljaju se često u fizikalnoj kemiji i poznati su pod nazivom **fulereni**. Općenito, oni ne moraju biti upisani u sferu. Za njihovo su otkriće H. Croto i dr. dobili Nobelovu nagradu za kemiju 1996. g. Najpoznatiji je tzv. "Buckminster fullerene", molekula C_{60} sa 60 ugljikovih atoma povezanih u strukturu nalik nogometnoj lopti (usp. sl. 8 a)) s 12 peterokuta i 20 šesterokuta, nazvanog po američkom inženjeru i arhitektu R. Buckminsteru Fulleru (1895.–1985.). Sa stanovišta fizikalne kemije, razumno je da su podaci dobiveni mjerenjima i jedino dostupni, a to su l i R, kao i kombinatorna struktura K koju dobivamo iz interatomnih i intermolekularnih kemijskih veza. Sada računanje $\mathrm{vol}(P)$ dobiva jasniji smisao. Prvo, pomoću stranica s Robbinsovom formulom izračunamo površinu B svake peterokutne strane. Zatim pomoću slične jednadžbe sedmog stupnja izračunamo radijus r opisane joj kružnice (vidi [7]). Iz Pitagorinog poučka dobivamo visinu $v = \sqrt{R^2 - r^2}$ piramide kojoj je središte opisane sfere vrh, a promatrani peterokut baza. Volumen te piramide je $\frac{1}{3}B \cdot v$. Ako je strana šesterokut, imamo poznate slične formule, a za trokute i četverokute uporabimo Heronovu i Brahmaguptinu formulu i formule za radijuse. I konačno, $\mathrm{vol}(P) = \frac{1}{3}\sum B \cdot v$, tj. volumen poliedra P dobivamo kao zbroj volumena tih piramida. Ovdje nam trebaju formule za radijus r opisane kružnice. Za trokut i tetivni četverokut smo ih već izveli. Za tetivni peterokut i šesterokut jednadžbe su 7. i 14. stupnja i dosta su složene (vidi [7]).

Naravno, površina (ili oplošje) fulerena P je jednaka zbroju $\sum B$ površina svih baza B. Ako fuleren nije upisan u sferu, onda pojedine površine računamo iz podataka koji su nam dostupni, pa ako možemo, rabeći Herona, Bretschneidera $(*)$, Gaussa $(\clubsuit)$ ili formulu $(\heartsuit)$ ili $(\heartsuit\heartsuit)$ itd. Bez dodatnh podataka volumen takvog poliedra ne možemo točno izračunati. Međutim, pomoću oplošja O možemo volumen V odozgo omeđiti pomoću sljedeće "izoperimetrijske nejednakosti" za konveksni poliedar s n strana:

$$\frac{O^3}{V^2} \geq 54(n-2)(4\sin^2\alpha_n - 1)\,\mathrm{tg}\;\alpha_n, \qquad \alpha_n = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{n}{n-2}.$$

Pritom se jednakost dostiže samo za pravilni tetraedar, kocku i dodekaedar. Izoperimetrijska nejednakost za n-terokut u ravnini veže opseg L i površinu P i glasi ovako:

$$\frac{L^2}{P} \geq 4n\,\mathrm{tg}\;\frac{\pi}{n},$$

s jednakošću samo za pravilni n-terokut. (Zainteresirani čitatelj može dokaze naći u knjizi [8].) Ustvari, čini se da su fulereni u prirodi često nepravilni i da izgledaju poput kakvih krumpira.

Kažimo još da se postupak za računanje oplošja može u mnogim posebnim slučajevima znatno pojednostavniti. Takav je npr. slučaj afino pravilnih poliedara. To su afine slike pravilnih. Afino preslikavanje je bijekcija prostora koja preslikava ravnine na ravnine (stoga i pravce na pravce) i čuva djelišni omjer. Afino pravilni poligon je afina slika pravilnog. Tako je svaki trokut afino pravilni, a afino pravilni četverokuti su paralelogrami. Pokazuje se ([7]) da je peterokut afino pravilan ako i samo ako ima sve vršne trokute jednakih površina. Posljedica Gaussove formule $P = \sqrt{5}\varphi k$ je stoga formula za površinu afino pravilnog peterokuta. Slična se formula može dobiti i za afino pravilne šesterokute.

Pet točaka u ravnini posve određuje koniku (npr. elipsu) na kojoj leže. Ako još znamo njene parametre, npr. duljine poluosi i pet duljina bridova, znamo li tada i površinu peterokuta? Afinim vraćanjem s elipse na kružnicu Robbins (uz kompjutor itd.) ne daje zadovoljavajući odgovor.

Bilo kako bilo, vidimo da algoritam za nalaženje oplošja, a naročito volumene fulerena, zahtijeva prilično mnogo računanja, ali se katkad mogu numerički pojednostavniti. Sve u svemu, kao i uvijek, računanje volumena je težak posao!

Napomenimo na kraju da se mnoge formule koje smo ovdje spomenuli (ili i dokazali) mogu mehanički (koordinatno) dokazati ili bolje reći provjeriti kompjutorskim simboličkim računanjem. O tome se može naći u [9].

A oni, koji umjesto puno formula, o matematici, fizici, astronomiji, računarstvu itd., te o povijesti znanstvenih ideja vole čitko, britko, duhovito i popularno pisano štivo, a žele si podići i razinu opće kulture, preporučujem knjigu poznatog britanskog matematičara i popularizatora Iana Stewarta [10] (u odličnom prijevodu Vjere Lopac na hrvatski). Ta knjiga započinje, a mi ćemo završiti u stilu godine fizike 2005. citatom iz pisma Alberta Einsteina Maxu Bornu govoreći o kvantnoj fizici: "Vi vjerujete u Boga koji se kocka, a ja u potpuni zakon i red."

Literatura

[1] D. Veljan, *The 2500-Year-Old Pythagorean Theorem*, Mathematical Magazine, 73 (2000), 259–272.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I, II*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[3] X. Hou, H. Li, D. Wang, *"The Russian Killer"*, Mathematical Intelligencer **23**(2001), 9–15.

[4] D. Brown, *Da Vincijev kod*, VBZ, Zagreb, 2004.

[5] H. Walser, *The Golden Section*, Math. Assoc. Amer., Washington DC, 2001.

[6] D. Robbins, *Areas of polygons inscribed in a circle*, Amer. Math. Monthly, **102**(1995), 523–530.

[7] D. Svrtan, D. Veljan, V. Volenec, *Geometry of pentagons: from Gauss to Robbins*, `http://xxx.lanl.gov/abs/math.MG/0403503`

[8] L. Fejes-Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[9] Wu Wen-tsun, *Mathematics Mechanization*, Science Press, Kluwer Acad. Publ., Beijing, 2000.

[10] I. Stewart, *Kocka li se Bog? Nova matematika kaosa*, Naklada Jesenski i Turk, Zagreb, 2003.