Статијата прв пат е публикувана во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2019/20 год.

О ЈЕДНОМ НЕОДРЕЂЕНОМ ИНТЕГРАЛУ И ОЈЛЕРОВОЈ ФОРМУЛИ

Милан Митрески, Београд

У трећем разреду гимназије обрађује се формула за тригонометријски облик комплексног броја

$$z = \rho(\cos x + i \sin x),$$

где су ρ и x редом тзв. модуо и аргумент комплексног броја z. При представљању у комплексној равни, ρ је растојање одговарајуће тачке z од координатног почетка O, док је x угао који који вектор $\overrightarrow{Oz}$ образује с позитивним смером Re-осе.

За тригонометријски облик комплексног броја везан је следећи експоненцијални облик

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

познат као Ојлерова формула.

Извођењем Ојлерове формуле нећемо се бавити јер она није предвиђена планом и програмом за средње школе. Разлог је што то захтева познавање и коришћење Тејлорове формуле за развој функције у степени ред.

Једна од примена Ојлерове формуле односи се на решавање појединих неодређених интеграла. Њеном употребом се поступак решавања скраћује или поједностављује. Карактеристичан пример је следећи интеграл:

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Као што је познато, овај интеграл се једноставно решава двоструком парцијалном интеграцијом. Међутим, уз помоћ Ојлерове формуле, једноставно се решава само методом смене промењиве. Штавише, „успут“ добијамо и решење интеграла $\int e^x \sin x \, dx$.

Нека је $I_1 = \int e^x \cos x \, dx$ и $I_2 = \int e^x \sin x \, dx$. Тада за збир $I_1 + iI_2$ имамо

$$I_1 + iI_2 = \int e^x \cos x \, dx + i \int e^x \sin x \, dx$$

$$= \int e^x (\cos x + i \sin x) dx$$

Како је, на основу Ојлерове формуле, $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, следи

$$I_1 + iI_2 = \int e^x \, e^{ix} dx = \int e^{(1+i)x} dx.$$

Након смене $(1+i)x = t$, $dt = (1+i)dx$, добијамо

$$\int e^{(1+i)x}dx = \frac{1}{1+i}\int e^t dt = \frac{1}{1+i}e^t + C,$$

где је $C = C_1 + iC_2$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ комплексна константа. Враћајући се на променљиву x добијамо

$$I_1 + iI_2 = \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{1}{1+i}e^{ix}e^x + C_1 + iC_2 \ .$$

Како је $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{2}$ и $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, добијамо даље

$$I_1 + iI_2 = \frac{e^x}{2}(1-i)(\cos x + i\sin x) + C_1 + iC_2$$

$$= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + i\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_1 + iC_2$$

$$= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C_1 + i\left(\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_2\right).$$

Изједначавајући реалне делове, добијамо да је

$$I_1 = \int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C_1.$$

Слично, изједначавањем имагинарних делова, добијамо решење и другог интеграла

$$I_2 = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_2.$$

Лако је проверити да се методом парцијалне интеграције добијају идентични резултати.

ЗАДАТАК

Употребом Ојлерове формуле, одредити вредност неодређених интеграла:

(а) $\int e^{ax}\cos bx\, dx$; (б) $\int e^{ax}\sin bx\, dx$

ако $a, b \in \mathbb{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] YouTube снимак са канала
blackpenredpen: https://www.youtube.com/watch?v=E_ecLWj_rcM