Један поступак за приближно израчунавање броја π

***Златко Удовичић*, Сарајево**

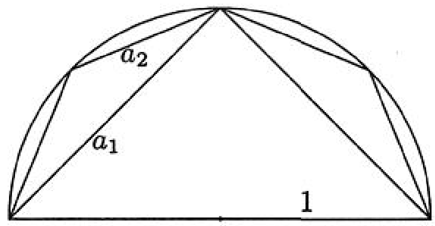
Број π је један од најважнијих бројева у математици и дефинише се као однос обима и пречника круга. У математичком образовању број π се први пут спомиње у седмом разреду основне школе. Ученицима се обично постави задатак да измере обим и пречник различитих предмета кружног облика (чаша, сто, точак на аутомобилу, ...), те да израчунају количник између та два броја. Упоређивањем добијених резулата изводи се закључак да је посматрани однос константан и да је приближно једнак броју три. На крају се усваја чињеница да број π није рационалан (не може се записати са коначно много цифара) и да је његова вредност приближно једнака 3.14.

У овом раду је описан један поступак који омогућава израчунавање броја π са произвољном тачношћу. Осим интуитивне представе о граничном процесу за разумевање поступка потребно је само познавање Питагорине теореме.

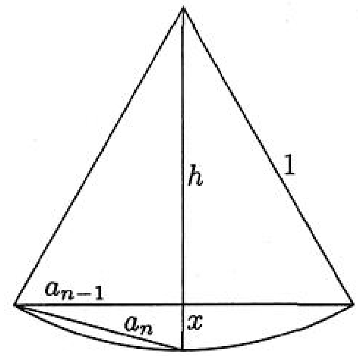
Итеративни поступак

Посматрајмо полукруг полупречника 1. Према дефиницији броја π, обим посматраног полукруга је управо π. Упишимо сада у посматрани полукруг једнакокраки правоугли троугао (половину квадрата уписаног у одговарајући круг), чија је хипотенуза пречник полукруга. У следећем кораку, у посматрани полукруг уписујемо половину правилног осмоугла (једна дијагонала осмоугла се поклапа са једном дијагоналом претходно уписаног квадрата), па половину правилног шеснаестоугла, ... (слика 1). Очигледно је да ће полуобим сваког одговарајућег правилног 2^n-тоугла (у посматрани полукруг је уписана половина 2^n-тоугла) бити утолико ближи обиму посматраног полукруга, уколико је број страна одговарајућег 2^n-тоугла довољно велик. Другим речима, апроксимација броја π је полуобим одговарајућег правилног 2^n-тоугла и та апроксимација је тачнија уколико одговарајући правилни 2^n-тоугао има више страна. Наравно, прва апроксимација броја π је полуобим квадрата уписаног у круг полупречника 1, тј. $2\sqrt{2}$. Дакле, ако желимо да израчунамо првих k децимала у запису броја π треба редом израчунавати полуобиме одговарајућих правилних 2^n-тоуглова све док се два узастопна полуобима не поклопе на првих k децимала. Претходно речено се симболички записује на следећи начин:

$$\begin{aligned} s_1 &= 2a_1 = 2\sqrt{2}, \\ s_2 &= 4a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= 2^n a_n, \\ \lim_{n\to+\infty} s_n &= \pi. \end{aligned}$$



Слика 1.



Слика 2.

Претпоставимо сада да смо израчунали полуобим правилног 2^{n-1}-тоугла странице a_{n-1} и да желимо да израчунамо полуобим правилног 2^n-тоугла странице a_n. Применом Питагорине теореме (слика 2) добија се да је:

$$\begin{aligned}
s_n &= 2^n a_n = 2^n\sqrt{x^2+\left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2} = 2^n\sqrt{(1-h)^2+\frac{a_{n-1}^2}{4}} \\
&= 2^n\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2}\right)^2+\frac{a_{n-1}^2}{4}} = 2^n\sqrt{2-\sqrt{4-a_{n-1}^2}} \\
&= 2^n\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{n-1}}{2^{n-1}}\right)^2}} = 2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{2^n-\sqrt{4^n-s_{n-1}^2}}\,.
\end{aligned}$$

Дакле за израчунавање полуобима правилног 2^n-тоугла потребно је израчунати полуобим претходног 2^{n-1}-тоугла. У табели која следи израчунати су полуобими првих дванаест 2^n-тоуглова.

n	s_n
1	2.8284271
2	3.0614675
3	3.1214452
4	3.1365485
5	3.1403312
6	3.1412773
7	3.1415137
8	3.1415729
9	3.1415877
10	3.1415914
11	3.1415923
12	3.1415926

Закључак

Основна предност описаног поступка је једноставност кориштеног математичког апарата. Будући да је коришћена само Питагорина теорема поступак се може излагати већ у седмом или осмом разреду основне школе (према мишљењу аутора, на доданој настави из математике). Други згодан тренутак за излагање овог поступка је у трећем или четвртом разреду средње школе приликом изучавања граничних процеса. Осим тога, поступак се веома једноставно реализује на рачунару, па се може презентирати и у настави информатике. У том случају је интересантна и његова визуелизација.

Са друге стране, недостатак овог поступка је извесна нумеричка нестабилност. Наиме, будући да чак ни почетну апроксимацију $2\sqrt{2}$ није могуће тачно израчунати, уколико се генерише превише чланова низа апроксимација, долази до уочљивог одступања добијеног од очекиваног резултата. Један од покушаја превазилажења овог проблема је реализација суштински истог алгоритма, с тим да се посматрају полукругови полупречника различитог од 1 (нпр. полупречника $\sqrt{2}$). Друга могућност је да се као почетна апроксимација броја π узме полуобим правилног шестоугла уписаног у посматрани полукруг, па да се уместо правилног 2^n-тоуглова посматрају правилни $3 \cdot 2^n$-тоуглови. Наравно, као почетна апроксимација се може узети и полуобим било којег n-тоугла, с тим да је тада израчунавање поменутог полуобима знатно сложеније.

У сваком случају, надамо се да ће овај чланак дати допринос и бољем излагању (од стране наставника), и бољем разумевању (од стране ученика) проблематике везане за број π.

Литература

[1] Д. Аднађевић, З. Каделбург: *Математичка анализа 1*, II издање, Научна књига, Београд, 1990.

[2] Д. Лопандић: *Геометрија за III разред усмереног образовања математичко-техничке струке*, II издање, Научна књига, Београд, 1990.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година