Републички натпревар 2000

I година

1. Ако $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, докажи дека $x=y=z$ или $|xyz|=1$.

Решение. Очигледно $xyz\neq 0$. Од $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ следува $x-y=\frac{y-z}{yz}$. Аналогно $y-z=\frac{z-x}{zx}$ и $z-x=\frac{x-y}{xy}$. Оттука добиваме

$$x-y=\frac{\frac{z-x}{zx}}{yz}=\frac{1}{xyz^2}\frac{x-y}{xz}=\frac{x-y}{x^2y^2z^2},$$

односно

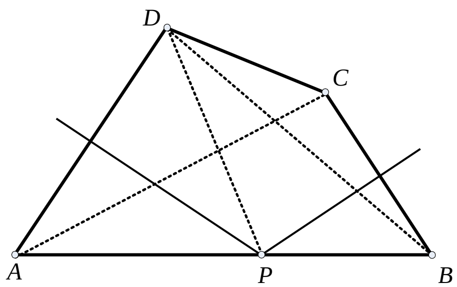
$$(x-y)(1-\frac{1}{x^2y^2z^2})=0.$$

Ако $x-y\neq 0$, тогаш $1-\frac{1}{x^2y^2z^2}=0$, а оттука добиваме

$$x^2y^2z^2=1, \text{ т.е. } |xyz|=1.$$

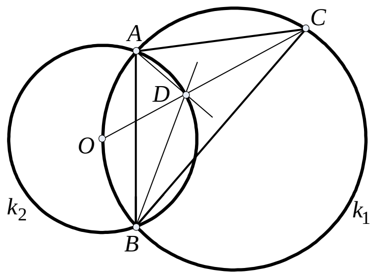
Ако $1-\frac{1}{x^2y^2z^2}\neq 0$, тогаш $x=y$, односно $x=y=z$.

2. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се еднакви. Ако симетралите на страните AD и BC се сечат во точка P која лежи на страната AB, докажи дека $\measuredangle DAB=\measuredangle ABC$.



Решение. Бидејќи точката P е пресечна точка на симетралите на страните BC и AD, следува дека $\overline{CP}=\overline{BP}$ и $\overline{AP}=\overline{DP}$. Триаголниците APC и DPB се складни ($\overline{AC}=\overline{DB}$ по услов, $\overline{AP}=\overline{DP}$ и $\overline{CP}=\overline{BP}$). Значи, $\measuredangle APC=\measuredangle DPB$. Бидејќи триаголниците APD и CPB се рамнокраки со еднакви агли при врвот, следува дека и аглите при основата се еднакви, односно $\measuredangle DAB=\measuredangle ABC$.

3. Нека кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B така што центарот O на кружницата k_2 лежи на k_1 и нека C е произволна точка од лакот AB од кружницата k_1 кој не ја содржи точката O и е различна од A и B. Отсечката OC ја сече кружницата k_2 во точката D. Докажи дека точката D е пресек на симетралите на внатрешните агли на триаголникот ABC.



Решение. Нека точката C припаѓа на лакот AB на кој што не припаѓа точката O. Ќе докажеме дека AD е симетрала на $\measuredangle BAC$. $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\measuredangle BOD$ (врска меѓу периферен и централен агол над лакот во BD). Понатаму, $\measuredangle BOD = \measuredangle BOC = \measuredangle BAC$ (периферни агли над лакот во BC).

Значи, $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$. Со тоа покажавме дека AD е симетрала на аголот BAC. Слично се покажува дека BD е симетрала на аголот ABC.

4. Најди ги сите природни броеви кои имаат точно шест делители, чиј збир е 3500.

Решение. Ако природниот број n има точно шест делители, тогаш $n = p^5$ или $n = q^2 r$ каде што p, q и r се прости броеви.

(i) Нека $n = p^5$. Тогаш $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$, односно

$$p(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 3499.$$

Бидејќи 3499 е прост број, следува дека овој случај не е можен.

(ii) Нека $n = q^2 r$. Тогаш $1 + q + q^2 + r + rq + r^2 q = 3500$, односно

$$(1 + q + q^2)(1 + r) = 3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

Бројот $1 + q + q^2 = 1 + q(1 + q)$ е непарен и не е делив со 5 ($1 + q + q^2$ може да дава остатоци $1, 2$ или 3 при делење со 5). Значи $1 + q + q^2 = 7$. Оттука добиваме $q(q+1) = 6 = 2 \cdot 3$, односно $q = 2$. Понатаму, добиваме $r = 499$ и конечно, $n = 1996$.

II година

1. Реши го во множеството на реалните броеви, системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 2 \\ x + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y + z^2 = 2 \end{cases}$$

Решение. Од првата ја одземаме втората равенка и добиваме $x^2 - x - z^2 + z = 0$, односно $(x - z)(x + z - 1) = 0$. Оттука $x = z$ или $x = 1 - z$. Слично, од првата ја одземаме третата равенка идобиваме $y^2 - y - z^2 + z = 0$, т.е. $(y-z)(y+z-1)=0$. Оттука $y=z$ или $y=1-z$. Можни се четири случаи:

(i) $x=z$, $y=z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2+z-1=0$, чии решенија се $z_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$. Решенијата на системот се

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}, \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}, \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}\right).$$

(ii) $x=z$, $y=1-z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2-z-1=0$, чии решенија се $z_1=1$ и $z_2=-\frac{1}{2}$. Решенија на системот во овој случај се $(1,0,1)$ и $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

(iii) $x=1-z$, $y=z$. Заменувајќи во првата равенка на системот добиваме $2z^2-z-1=0$, чии решенија се $z_1=1$ и $z_2=-\frac{1}{2}$. Решенијата на системот во овој случај се $(0,1,1)$ и $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

(iv) $x=1-z,$ $y=1-z.$ Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2-3z=0,$ чии решенија се $z_1=0$ и $z_2=\frac{3}{2}$. Решенијата на системот во овој случај се $(1,1,0)$ и $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

2. Дали постојат квадратни триноми $(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$ и ax^2+bx+c со целобројни коефициенти, такви што секој од нив има по два различни цели корени?

Решение. Да претпоставиме дека постојат такви триноми. Нека x_1 и x_2 се корени на ax^2+bx+c а y_1 и y_2 се корени на $(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$. Од Виетовите формули следува:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1x_2=\frac{c}{a};\quad y_1+y_2=-\frac{b+1}{a+1};\quad y_1y_2=\frac{c+1}{a+1}.$$

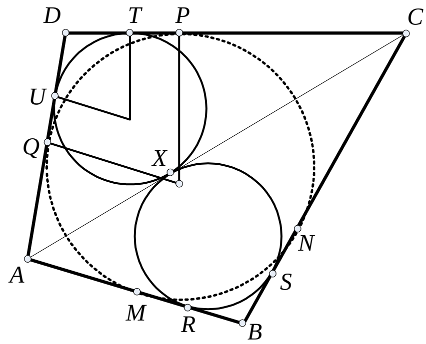
Бидејќи x_1, x_2, y_1 и y_2 се цели броеви следува дека $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b+1}{a+1}, \frac{c+1}{a+1}$ се цели броеви. Еден од броевите a и $a+1$ е парен. Нека е тоа a. Тогаш и b и c се парни броеви. Значи $a+1$, $b+1$, $c+1$ се непарни. Следува дека броевите y_1+y_2 и y_1y_2 се непарни. Но збирот и производот на два броја не може да бидат во исто време непарни. Значи, не постојат квадратни триноми со бараното својство.

3. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник. Докажи дека:

a) Впишаните кружници во двата триаголника на кои дијагоналата AC го дели четириаголникот се допираат.

b) Допирните точки на двете кружници со страните на четириаголникот се темиња на тетивен четириаголник.

Решение. Нека M, N, P и Q се допирните точки на впишаната кружница во четириаголникот $ABCD$ со страните AB, BC, CD, DA соодветно. Нека впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB, BC, CA во точките R, S, X соодветно, а впишаната кружница во триаголникот ACD ги допира страните AC, CD, DA во точките X_1, T, U соодветно.



a) Четириаголникот $ABCD$ е тангенен, па $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$. Од триаголникот ABC добиваме:

$$\begin{aligned}\overline{AX} &= \overline{AC}-\overline{XC}=\overline{AC}-\overline{CS}\\ &= \overline{AC}-\overline{CB}+\overline{BS}=\overline{AC}-\overline{CB}+\overline{BR}\\ &= \overline{AC}-\overline{CB}+\overline{AB}-\overline{AR}\\ &= \overline{AC}-\overline{CB}+\overline{AB}-\overline{AX}\end{aligned}$$

а оттука добиваме $\overline{AX}=\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{CB}}{2}$.

На сличен начин, од триаголникот ACD, добиваме $\overline{AX}=\frac{\overline{AC}+\overline{AD}-\overline{CD}}{2}$. Понатаму,

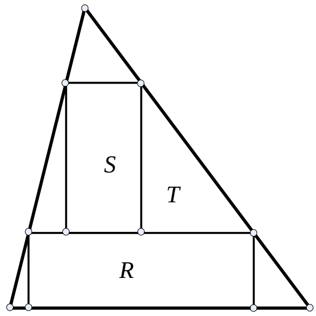
$$\overline{XX_1}=|\overline{AX}-\overline{AX_1}|=|\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}}{2}-\frac{\overline{AD}+\overline{AC}-\overline{CD}}{2}|=\frac{1}{2}|\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{BC}-\overline{AD}|=0$$

Значи, точките X и X_1 се совпаѓаат.

b) Бидејќи $\overline{BR}=\overline{BS}$, $\overline{BM}=\overline{BN}$, следува дека $RS \| MN$. Слично се покажува дека $UT \| QP$, $QM \| UR$, $PN \| TS$. Четириаголникот $MNPQ$ е тетивен, па збирот на спротивните агли е 180°. Бидејќи страните на четириаголникот $RSTU$ се паралелни со страните на $MNPQ$ следува дека $RSTU$ е тетивен.

4. Во триаголник со плоштина T се впишани два правоаголника со плоштини R и S (види цртеж). Најди ја најголемата можна вредност на изразот $\frac{R+S}{T}$.

Решение. Нека Q е фигурата која што е составена од петте триаголници кои се во внатрешноста на триаголникот, а надвор од правоаголниците. Од двата триаголника кои што имаат заедничка страна со правоаголникот со плоштина R може да се состави нов триаголник T_1 кој што е сличен со дадениот триаголник. Истото може да се направи и со триаголниците кои што имаат иста страна со пра-



воаголникот со плоштина S. Со нивно составување го добиваме триаголникот T_2 кој што е сличен со дадениот триаголник. Триаголникот над правоаголникот S го означуваме со T_3 и тој е сличен со дадениот триаголник. Нека a, b, c се висините во триаголниците T_1, T_2, T_3 соодветно, кои што се нормални на по две страни од правоаголниците. Тогаш $a+b+c$ е должина на висината на дадениот триаголник. Бидејќи T_1, T_2, T_3 се слични со дадениот триаголник, следува:

$$\frac{P_{T_1}}{T} = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}, \quad \frac{P_{T_2}}{T} = \frac{b^2}{(a+b+c)^2}, \quad \frac{P_{T_3}}{T} = \frac{c^2}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{S+R}{T} = \frac{T-P_Q}{T} = 1 - \frac{P_{T_1}+P_{T_2}+P_{T_2}}{T} = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} = 2\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \le \frac{2}{3}$$

Нравенството е исполнето бидејќи

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \ge 3ab + 3bc + 3ac \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca).$$

III година

1. Најди ги сите реални броеви x и y кои што ја задоволуваат равенката

$$\log_2(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)}) = \frac{1}{y^2-2y+2}.$$

Решение. За да биде изразот на левата страна добро дефиниран треба $xy \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. Бидејќи $\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \ge 2$ следува дека

$$\log_2(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)}) \ge \log_2 2 = 1.$$

Но $\frac{1}{y^2-2y+2} = \frac{1}{(y-1)^2+1} \le 1$, па равенство ќе важи само ако $\cos(xy) = \frac{1}{\cos(xy)}$ и $\frac{1}{(y-1)^2+1} = 1$. Од втората равенка имаме $y = 1$ а од првата $x = k\pi$, $k \in Z$. Значи, решенија се сите парови $(k\pi, 1)$, каде што $k \in Z$.

2. Најди ги сите тројки (a, b, c) каде што a, b, c се должини на страни на триаголникот ABC со агли α, β, γ, такви што броевите $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ се должини на страни на триаголник, складен со триаголникот ABC.

Решение. Од условите на задачата следува дека $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ се позитивни. Значи, триаголникот ABC е остроаголен. Нека $a \le b \le c$. Тогаш $\alpha \le \beta \le \gamma$, па $\cos\gamma \le \cos\beta \le \cos\alpha$. Од условот на задачата следува $a = \cos\gamma$ и $c = \cos\alpha$. Оттука следува дека $a : c = \cos\gamma : \cos\alpha$. Од синусна теорема добиваме $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, па од ова и претходното равенство добиваме

$$\cos\gamma : \cos\alpha = \sin\alpha : \sin\gamma \text{, односно } \sin\alpha\cos\alpha = \sin\gamma\cos\gamma .$$

Значи $\sin 2\alpha = \sin 2\gamma$ или $2\alpha + 2\gamma = \pi$ (ова не е можно, бидејќи тогаш $\beta = \frac{\pi}{2}$, па $\cos\beta = 0$). Значи $\alpha = \gamma$, односно $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, па постои само една тројка со бараното својство. Тоа е тројката $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Најди ја најмалата вредност на изразот $|36^m - 5^n|$, ако m и n се природни броеви.

Решение. Разгледуваме два случаја:

a) $36^m > 5^n$. Последната цифра на бројот $36^m - 5^n$ е 1. Нека $36^m - 5^n = 1$. Тогаш $5^n = (6^m + 1)(6^m - 1)$, што не е можно, бидејќи 5 не е делител на $6^m + 1$.

Нека $36^m - 5^n = 11$. Очигледно за $m = 1$, $n = 2$ равенството е исполнето.

b) $36^m < 5^n$. Последната цифра на бројот $5^n - 36^m$ е 9. Нека $5^n - 36^m = 9$. Оваа равенка нема решение во множеството природни броеви бидејќи 9 не е делител на 5^n.

Значи, најмалата вредност на $|36^m - 5^n|$ е 11.

4. Нека AB и CD се тетиви на кружницата k што се сечат. На тетивата AB е избрана точка M така што $\overline{AM} = \overline{AC}$, а на тетивата CD е избрана точка N така што $\overline{DN} = \overline{DB}$. Ако точките N и M не се совпаѓаат, докажи дека правата MN е паралелна со правата AD.

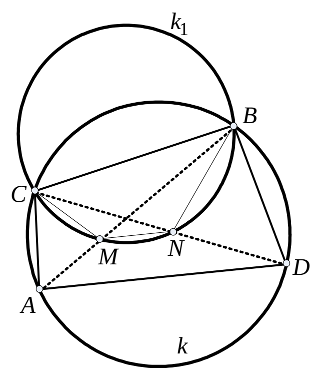
Решение. Триаголникот MAC е рамнокрак ($\overline{AM} = \overline{AC}$ по услов) па следува дека

$$\measuredangle ACM = \measuredangle CMA .$$

Аналогно, триаголникот NDB е рамнокрак ($\overline{DN} = \overline{DB}$ по услов), па следува дека

$$\measuredangle DNB = \measuredangle NBD .$$

Имајќи во предвид дека $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$ (периферни агли над ист кружен лак), добиваме



$$\begin{aligned} 2\measuredangle CMA + \measuredangle CAM &= 180^\circ = \measuredangle CDB + 2\measuredangle DNB \\ &= \measuredangle CAB + 2\measuredangle DNB \end{aligned}$$

Оттука следува:

$$2\measuredangle CMA + \measuredangle CAB = \measuredangle CAB + 2\measuredangle DNB$$

т.е. $\measuredangle CMA = \measuredangle DNB$. Понатаму,

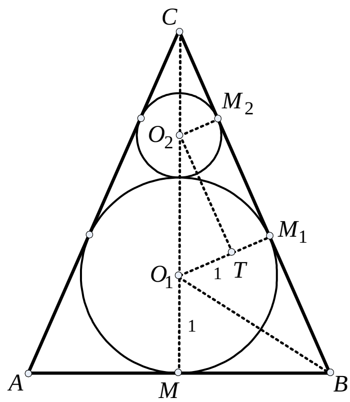
$$\measuredangle CMB = 180^\circ - \measuredangle CMA = 180^\circ - \measuredangle DNB = \measuredangle BNC$$

т.е. $\measuredangle CMB = \measuredangle BNC$, што значи дека точките M, N, B и C лежат на иста кружница. Сега добиваме $\measuredangle BMN = \measuredangle BCN$ (периферни агли над лакот BN во кружницата k_1) и $\measuredangle BCN = \measuredangle BAD$ (периферни агли над лакот BD во кружницата k). Конечно $\measuredangle BMN = \measuredangle BAD$, а оттука следува дека $MN \parallel AD$.

IV година

1. Во рамнокракиот триаголник ABC дадени се $\overline{AC} = \overline{BC} = 2b$ и $\measuredangle CAB = 2\alpha$. Нека P_1 е плоштината на впишаниот круг k_1 во триаголникот ABC, P_2 е плоштина на кругот што ја допира кружницата k_1 и краците на триаголникот ABC, ..., P_i е плоштина на кругот што ја допира кружницата k_{i-1} и краците на триаголникот ABC и т.н. Пресметај го збирот $P_1 + P_2 + ... + P_n + ...$

Решение. Нека $\overline{AB} = 2a$, односно $\overline{MB} = a$, $\measuredangle MBO_1 = \measuredangle O_1BM_1 = \alpha.$ Од правоаголниот триаголник O_1MB следува $\overline{O_1M} = r_1 = a \cdot tg\alpha$. Нека T е точка од отсечката O_1M_1 така што $O_2T \perp O_1M_1$. Оттука следува $\overline{TM_1} = \overline{O_2M_2} = r_2$. Понатаму, $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, $\overline{O_1T} = r_1 - r_2$ и $\angle O_2O_1T = 2\alpha$. Од правоаголниот триаголник O_1TO_2 добиваме $r_1 - r_2 = (r_1 + r_2)\cos 2\alpha$, т.е. $r_1(1 - \cos 2\alpha) = r_2(1 + \cos 2\alpha)$. Оттука следува $r_2 = r_1 tg^2\alpha$.



Аналогно, $r_3 = r_2\, tg^2\alpha = r_1\, tg^4\alpha$, или општо:

$$r_n = r_1\, tg^{2(n-1)}\alpha, \quad n \in N \quad \text{и}$$

$$P_1 = \pi r_1^2 = \pi a^2\, tg^2\alpha,$$

$$P_2 = \pi r_2^2 = \pi r_1^2\, tg^4\alpha \;,....,$$

$$P_n = \pi r_n^2 = \pi r_1^2\, tg^{4(n-1)}\alpha \;,...$$

Бидејќи $2\alpha < \frac{\pi}{2}$, следува $\alpha < \frac{\pi}{4}$, односно $tg\alpha < 1$, па можеме да ја примениме формулата за збир на бескраен геометриски ред

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n + ... = \pi r_1^2 (1 + tg^4\alpha + tg^8\alpha + ...)$$

$$= \pi r_1^2 \frac{1}{1 - tg^4\alpha} = \pi a^2\, tg^2\alpha \frac{1}{1 - tg^4\alpha} = \pi a^2 \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Од правоаголниот триаголник MBC следува $a = 2b\cos 2\alpha$, па конечно добиваме:

$$P = 4\pi b^2 \cos^2 2\alpha \frac{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \pi b^2 \cos 2\alpha \sin^2 2\alpha$$

2. Исто како задача 3 во III година.

3. Исто како задача 4 во III година.

4. Функцијата $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ги задоволува следните услови:

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) $f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a) + f(b)$ за секои $a, b \in [0,1]$.

Докажи дека равенката $f(x) = 0$ има бесконечно многу решенија.

Решение. Ако во (ii) ставиме $a = b$, ќе добиеме $f(a) \leq 2f(a)$, односно

$$f(a) \geq 0 \text{ за секој реален број } a \in [0,1]. \quad (1)$$

Ако во (ii) ставиме $a = 0$, $b = 1$ ќе добиеме $f(\frac{1}{2}) \leq f(0) + f(1) = 0$, а имајќи го предвид и (1), следува дека $f(\frac{1}{2}) = 0$. Понатаму ги разгледуваме интервалите $[0,\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2},1]$. За секој од нив, f е еднаква на нула во крајните точки, па од (ii) следува $f(\frac{1}{4}) = 0 = f(\frac{3}{4})$. Со индукција по n се добива дека $f(x) = 0$ за секој $x \in [0,1]$ од облик $x = \frac{m}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, 2^n$.