XXX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

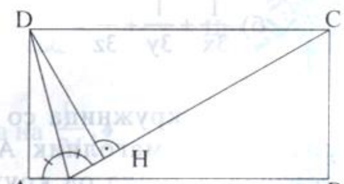
1. Три групи пошумувале еден дел од рид. Првата група насадила $\frac{7}{20}$ од сите садници, втората $\frac{3}{5}$ од останатите, а третата преостанатите 260 садници. Колку вкупно садници биле посадени?

Решение. Да го означиме со x вкупниот број на садници што биле посадени. Според условот во задачата имаме $x-\frac{7}{20}x-\frac{3}{5}(x-\frac{7}{20}x)=260$, од каде што добиваме дека $x=1000$. ♦

2. Производот на два двоцифрени броја е 4032. Вториот број е запишан со истите цифри како и првиот, но во обратен редослед. Кои се тие броеви?

Решение. Да ги означиме со $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ дадените двоцифрени броеви. Тогаш, од условот во задачата, имаме $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=4032=2^6\cdot3^2\cdot7$. Оттука следува дека 3 е делител на двата броја $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ (бидејќи ако едниот од нив е делив со 9 тогаш и другиот ќе биде делив со 9, односно производот на двата броја е делив со 81, што е неточно). Уште, 7 е делител на само еден од броевите на пример на $\overline{ab}$. Значи 21 е делител на $\overline{ab}$, односно $\overline{ab}\in\{21,42,84\}$. Со проверка се добива дека бараните броеви се 84 и 48. ♦

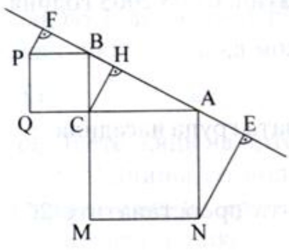
3. Даден е правоаголник ABCD во кој важи $\overline{AB}=2\overline{BC}$. На страната AB е избрана точка K, таква што $\angle AKD=\angle DKC$. Најди го овој агол.



Црт. 1

Решение. Да ја повлечеме висината DH на триаголникот KCD (црт.1). Триаголниците KDA и KDH се складни (правоаголни со заедничка страна KD и $\angle AKD=\angle DKC$), а оттука $\overline{DH}=\overline{DA}=\frac{\overline{DC}}{2}$. Бидејќи триаголникот CDH е правоаголен, со катета $\overline{DH}$ два пати помала од хипотенузата $\overline{DC}$, добиваме дека $\angle HCD=30^\circ$. Тогаш $\angle CKB=\angle HCD=30^\circ$, а оттука $\angle CKA=150^\circ$. Значи $\angle AKD=\angle DKC=75^\circ$. ♦

4. Даден е правоаголен триаголник ABC. Над катетите BC и CA, конструирани се квадрати ACMN и CBPQ, надвор од триаголникот. Нека со E и F се означени подножјата на нормалите од точките N и P на правата AB, соодветно. Докажи дека важи равенството $\overline{NE}+\overline{PF}=\overline{AB}$.



Црт. 2

Решение. Да ја повлечеме висината CH на триаголникот ABC (црт. 2). Тогаш добиваме дека $\angle FBP=90^\circ-\angle HBC=\angle HCB$, $\angle BFP=90^\circ=\angle CHB$ и $\overline{PB}=\overline{BC}$, од каде што следува дека триаголниците PBF и BCH се складни. Затоа $\overline{PF}=\overline{BH}$. Слично, од складноста на триаголниците CAH и ANE, имаме $\overline{NE}=\overline{AH}$. Конечно, $\overline{NE}+\overline{PF}=\overline{AH}+\overline{BH}=\overline{AB}$. ♦

VII одделение

1. Нека за ненултите броеви a, b, c, x, y и z важат равенствата

$x=bc+\frac{1}{a}$, $y=ca+\frac{1}{b}$, $z=ab+\frac{1}{c}$ и $ax+by+cz=1$.

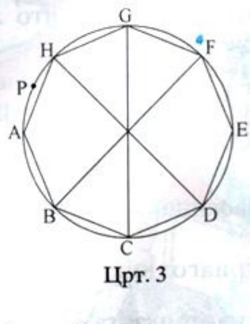
а) Пресметај го производот abc;

б) Докажи дека $a+b+c=\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{3z}$.

Решение. а) Од $1=ax+by+cz=abc+1+abc+1+abc+1$ следува дека $abc=-\frac{2}{3}$.

б) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{3z}=\frac{a}{3abc+3}+\frac{b}{3abc+3}+\frac{c}{3abc+3}=\frac{a+b+c}{3(-\frac{2}{3})+3}=a+b+c$. ♦

2. Во кружница со радиус 1cm е впишан правилен осумаголник ABCDEFGH. Нека P е произволна точка од кружницата, различна од темињата на осумаголникот. Колку е збирот $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2$?



Црт. 3

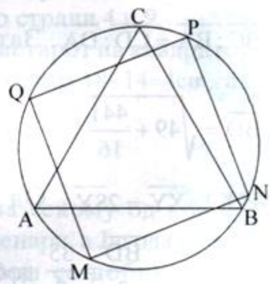
Решение. Аголот APE е агол над дијаметар и затоа е прав агол (црт.3). Тогаш $\overline{PA}^2+\overline{PE}^2=\overline{AE}^2=2^2=4$. Слично, $\overline{PB}^2+\overline{PF}^2=4$, и $\overline{PD}^2+\overline{PH}^2=4$. Затоа, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2=16$. ♦

3. За броевите x и y, $0 < x < y$, важи равенството $x^2 + 4y^2 = 5xy$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x+2y}{x-2y}$.

Решение. Од равенствата $(x+2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = 9xy$ и $(x-2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy = xy$ добиваме дека $\left(\frac{x+2y}{x-2y}\right)^2 = 9$, односно $\frac{x+2y}{x-2y} = \pm 3$. Од $0 < x < y$ следува дека $x + 2y > 0$, а од $x < 2x < 2y$ следува $x - 2y < 0$. Затоа $\frac{x+2y}{x-2y} < 0$, а оттука $\frac{x+2y}{x-2y} = -3$. ♦

4. Рамностран триаголник и квадрат се впишани во една иста кружница, така што темињата на триаголникот и на квадратот не се совпаѓаат. Сите темиња ја сечат кружницата на 7 кружни лаци. Докажи дека некој од тие кружни лаци има должина помала или еднаква на $\frac{1}{24}$ од периметарот на кружницата.

Решение. Нека рамностраниот триаголник е ABC (црт. 4). A, B и C ја делат кружницата на три лаци. Бидејќи квадратот MNPQ и ABC имаат различни темиња, две од темињата на квадратот се на еден од трите лаци (на цртежот N и P се на лакот BC кој не ја содржи A). Тогаш, од $\overset{\frown}{BC} = \frac{L}{3}$ и $\overset{\frown}{PN} = \frac{L}{4}$, $\overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{PC} = \frac{L}{3} - \frac{L}{4} = \frac{L}{12}$. Значи, барем еден од лаците $\overset{\frown}{BN}$ или $\overset{\frown}{PC}$ има должина помала или еднаква на $\frac{L}{24}$. ♦



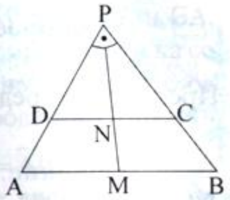
Црт. 4

VIII одделение

1. Претстави го бројот 2005 како збир на последователни природни броеви, на сите можни начини.

Решение. Од $x + (x+1) + \ldots + (x+k-1) = 2005$ добиваме дека $k(2x+k-1) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 401$. Оттука $k = 2,5,10$ односно $2005 = 1002 + 1003$, $2005 = 399 + 400 + 401 + 402 + 403$ и $2005 = 196 + \ldots + 205$. ♦

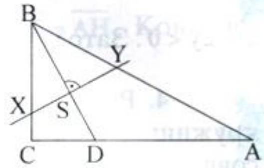
2. Во трапез ABCD важи $\angle DAB + \angle CBA = 90^\circ$. Докажи дека отсечката што ги поврзува средините на основите има должина еднаква на половината од разликата на основите.



Црт. 5

Решение. Нека M и N се средини на основите, а P е пресечната точка на продолженијата на краците на трапезот (црт.5). Тогаш P, N и M се колинеарни точки и триаголниците ABP и DCP се правоаголни. Затоа $\overline{MP} = \overline{MA} = \frac{a}{2}$, $\overline{NP} = \overline{ND} = \frac{b}{2}$ а оттука $\overline{MN} = \overline{MP} - \overline{NP} = \frac{a-b}{2}$. ♦

3. Должините на страните на триаголник ABC се $\overline{AB} = 25cm$, $\overline{BC} = 7cm$ и $\overline{AC} = 24$. Симетралата на аголот кај темето B ја сече страната AC во точка D. Симетралата на отсечката BD ја сече BC во X, а AB во Y. Најди ја должината на отсечката XY.



Црт. 6

Решение. Од обратната теорема на Теоремата на Питагора следува дека триаголникот ABC е правоаголен со прав агол кај темето C (црт.6). Бидејќи BD е симетрала на аголот CBA важи $\overline{BC} : \overline{BA} = \overline{CD} : \overline{DA}$. Затоа $24 = \overline{CD} + \frac{25}{7}\overline{CD} = \frac{32}{7}\overline{CD}$, односно $\overline{CD} = \frac{21}{4}$. Тогаш $\overline{BD} = \sqrt{49 + \frac{441}{16}} = \frac{35}{4}$. Бидејќи триаголниците YBS и XBS се складни, следува дека $\overline{XY} = 2\overline{SY}$. Од сличноста на триаголниците YBS и DBC и од $\overline{BS} = \overline{SD} = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{35}{8}$ добиваме $\overline{BS} : \overline{BC} = \overline{SY} : \overline{CD}$, $\overline{XY} = \frac{21 \cdot 35}{4 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{105}{16}$ cm. ♦

4. Најди ги сите прости броеви p и q и природни броеви n за кои важи p е делител на $q-1$ и q^n е делител на p^2-1.

Решение. Нека $p|q-1$ и $q^n \big| p^2-1$. Тогаш $p \le q-1$ и $q^n \le p^2-1$, од каде што $q^n \le p^2 - 1 \le (q-1)^2 - 1 = q^2 - 2q$. Неравенството $q^n \le q^2 - 2q$ не важи за $n \ge 2$. Значи $n = 1$, односно $q|(p-1)(p+1)$. Ако $q|p-1$ тогаш $q \le p-1 \le q-2$, што е невозможно. Тогаш $q|p+1$, а од $q \le p+1 \le q$ следува $q = p+1$. Последното равенство важи само за $p = 2$ и $q = 3$. Значи, единствено решение е $n = 1$, $p = 2$, $q = 3$. ♦