ММО 2024

1. Определете ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за сите $x,y\in\mathbb{R}$ важи:

$$xf(x+y)+yf(y-x)=f(x^2+y^2)\,.$$

Решение. Да забележиме дека сите функции од облик $f(x)=cx$, каде што c е реална константа, ја задоволуваат равенката. **(1п)**

Со $P(x,y)$ го означуваме тврдењето

$$xf(x+y)+yf(y-x)=f(x^2+y^2).$$

Од $P(0,0)$ добиваме $f(0)=0$ и со помош на тоа, заедно со $P(x,0)$, заклучуваме дека $xf(x)=f(x^2)$ за сите $x\in\mathbb{R}$. Од $P(-x,0)$ имаме и дека $-xf(-x)=f(x^2)=xf(x)$ за сите $x\in\mathbb{R}$. Оттаму, ако $x\neq 0$ тогаш $f(-x)=-f(x)$. Со оглед дека $f(0)=0$, следува дека $f(-x)=-f(x)$ за сите $x\in\mathbb{R}$, т.е. f е непарна функција. **(2п)**

Од $P(y,x)$ се добива:

$$yf(y+x)+xf(x-y)=f(y^2+x^2)=f(x^2+y^2)=xf(x+y)+yf(y-x)\,. \quad \textbf{(1п)}$$

Согласно непарноста на f, важи $f(x-y)=-f(y-x)$, што значи дека:

$$yf(x+y)-xf(y-x)=xf(x+y)+yf(y-x). \quad \textbf{(1п)}$$

Да фиксираме $t\in\mathbb{R}$ и замениме $x=\frac{t-1}{2}$ и $y=\frac{t+1}{2}$ во последната равенка. Добиваме

$$f(t)=t\cdot f(1)\,,\quad \text{за секој } t\in\mathbb{R}\,.$$

Следствено, сите решенија се дадени со $f(x)=cx$, каде c е реална константа. **(3п)** □

2. Нека p и q се непарни прости броеви и нека a е природен број таков што $p|a^q+1$ и $q|a^p+1$. Докажете дека $p|a+1$ или $q|a+1$.

Решение. Да претпоставиме дека $p\nmid a+1$ и $q\nmid a+1$. Без губење на општост, нека $q\geq p$.

Нека $t=\operatorname{ord}_p(a)$. Бидејќи $p|a^q+1$, добиваме $p|a^{2q}-1=(a^q-1)(a^q+1)$. Тоа значи дека $t|2q$, и оттука $t\in\{1,2,q,2q\}$. **(2п)**

Ако $t=1$, тогаш $p|a-1$, што повлекува $p=2$; но p е непарен, па овој случај не е возможен. **(1п)** Ако $t=q$, тогаш $p|a^q-1$; но исто така знаеме дека $p|a^q+1$, па со тоа заклучуваме дека $p|2$, што повторно е контрадикција. **(1п)** Доколку пак $t=2q$, од малата теорема на Ферма добиваме $2q|p-1$. Но, $p-1<p\leq q<2q$, од каде повторно се добива контрадикција. **(3п)** Заклучуваме дека $t=2$ и тогаш важи $p|a^2-1$. Со оглед дека $p\nmid a-1$, добиваме $p|a+1$, што и требаше да се докаже. **(1п)** □

3. Во градот на џуџињата има 1000 идентични згради, од кои секоја има 1000 ката, при што точно едно џуџе живее на секој кат. Секој жител во градот носи капа обоена во една од 1000 можни бои и било кои два станари на иста зграда имаат различно обоени капи. За две џуџиња велиме дека се *пријатели* доколку носат капи во иста боја, и живеат на последователни катови (во различни згради). Одредете го најголемиот можен број на (неподредени) парови џуџиња кои се пријатели.

Решение. Нека $k = 500$. Прво ќе покажеме дека за фиксна боја c, не може да има повеќе од k^2 парови другари со капи во бојата c.

Навистина, да формираме (едноставен) граф чии темиња се џуџињата со капи во бојата c при што помеѓу две темиња има ребро доколку соодветните џуџиња се пријатели. **(1п)**

Да покажеме дека овој граф нема триаголници. Да го претпоставиме спротивното, дека џуџињата кои живеат на катови со броеви s_1, s_2 и s_3 се пријатели (по парови). Без губење на општоста, нека $s_1 > s_2 > s_3$. Тогаш $s_1 = s_2 + 1$ и $s_2 = s_3 + 1$. Но ова значи дека џуџињата кои живеат на катовите нумерирани со броевите s_1 и s_3 не се пријатели бидејќи $s_1 - s_3 = 2$, контрадикција. **(1п)**

Ќе го користиме следниот помошен резултат (познат како **Теорема на Мантел**).

Лема. Секој едноставен граф од ред (број на темиња) $n \geq 3$ и големина (број на ребра) $m > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ содржи триаголник. **(1п)**

Доказ 1. Да забележиме дека тврдењето е исполнето за $n \in \{4, 5\}$. Под претпоставка дека тврдењето не е точно во општ случај, разгледуваме противпример G од најмал можен ред n. Значи $n \geq 5$. Нека uv е произволно ребро од G. Со оглед дека uv не лежи на триаголник, не постои теме w кое е соседно со обете u и v. Оттаму, $(\deg(u) - 1) + (\deg(v) - 1) \leq n - 2$, односно $\deg(u) + \deg(v) \leq n$. Нека $G' = G - u - v$ е графот добиен од G со бришење на темињата u и v (заедно со сите ребра инцидентни со барем едно од овие две темиња). Така G' има ред (број на темиња) $n' = n - 2$ и големина (број на ребра)

$$m' = m - (\deg(u) + \deg(v)) + 1 \geq m - n + 1 > \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor - n + 1\,.$$

Значи,

$$m' > \frac{n^2}{4} - n + 1 = \frac{n^2 - 4n + 4}{4} = \frac{(n-2)^2}{4}\,.$$

Со оглед дека $n - 2 \geq 3$, од минималниот избор на G следува дека G' содржи триаголник. Но, $G' \subseteq G$, што противречи на претпоставката дека G не содржи триаголник. ⋄

Доказ 2. Нека G е едноставен граф од ред n кој не содржи триаголници. Со α го означуваме бројот на елементи на едно најголемо независно множество $A \subseteq V(G)$. (За подмножество од $V(G)$ велиме дека е *независно* доколку нема ребра помеѓу неговите елементи.) Нека $\beta = n - \alpha$. Со оглед дека G не содржи триаголник, соседите на произволно теме $v \in V(G)$ формираат независно множество. Оттаму, $\deg(v) \leq \alpha$.

Секое ребро од G има барем еден завршеток (теме) во множеството $B = V(G) \backslash A$ (бидејќи A е независно). Затоа, броејќи ги ребрата на G гледано од нивните завршетоци во B, имаме $m = |E(G)| \leq \sum\limits_{v \in B} \deg(v)$. Следствено, неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина дава

$$m \leq \sum_{v \in B} \deg(v) \leq \alpha\beta \leq (\frac{\alpha + \beta}{2})^2 = \frac{n^2}{4}$$

.

Всушност, овој доказ покажува нешто повеќе: Помеѓу едноставните графови од ред n кои не содржат триаголник, најмногу ребра, имено $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, има единствено графот $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. ⋄

(1п)

Од лемата непосредно имаме дека секој едноставен граф без триаголници кој има $2k$ темиња може да има најмногу k^2 ребра. (Притоа, равенство се достигнува единствено за комплетниот бипартитен граф $K_{k,k}$.) Оттука, за секоја боја може да има најмногу k^2 парови џуџиња пријатели со капи во таа боја. Следствено, вкупниот број на пријателства во градот не може да надмине $2k \cdot k^2 = 2k^3 = 2 \cdot 500^3$. **(1п)**

За да добиеме конструкција при која се реализира добиената горна граница, нека $\{c_1,...,c_{2k}\}$ е множеството бои. Во првите 500 згради земаме низата бои на капите кои џуџуњата станари ги носат, редоследно од долу нагоре, да е $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_{2k-1}, c_{2k}$, а во преостанатите 500 згради нека таа низа гласи $c_2, c_1, c_4, c_3, \ldots, c_{2k}, c_{2k-1}$. Така секое џуџе има точно k пријатели. Со оглед дека вкупниот број на џуџиња е $2k \cdot 2k = 4k^2$, вкупниот број на пријателства е

$$\frac{1}{2} \cdot kn^2 \cdot k = 2k^3 = 2 \cdot 500^3.$$

Оттука заклучуваме дека најголемиот можен број на пријателства изнесува $2 \cdot 500^3$. **(3п)** $\square$

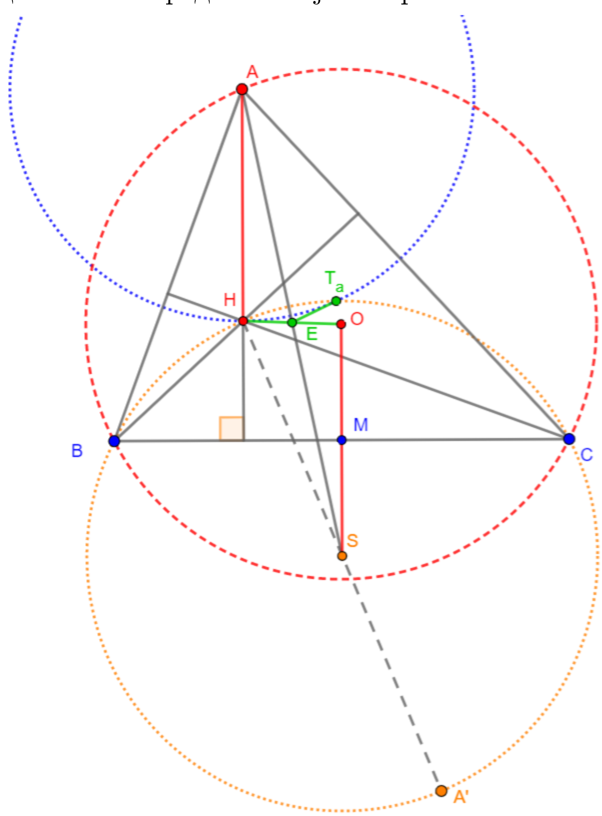
4. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамнокрак. Нека H е ортоцентар на $\triangle ABC$. Кружницата со центар во A и радиус AH ја сече опишаната кружница околу $\triangle BHC$ во точка $T_a \neq H$. Точките T_b и T_c се дефинирани аналогно. Докажете дека H лежи на опишаната кружница околу $\triangle T_aT_bT_c$.

Решение 1. Нека M е средина на BC. Со $\mathcal{S}$ ја означуваме централната симетрија во однос на точката M. Ако $A' = \mathcal{S}(A)$, тогаш $BA'CH$ е тетивен бидејќи

$$\angle BA'C + \angle BHC = \angle BAC + \angle BHC = 180°,$$

затоа што $\angle BA'C = \angle BAC$ и $\angle BHC = 180° - \angle BAC$. Исто така гледаме дека $\mathcal{S}(A) = A'$, $\mathcal{S}(B) = C$, $\mathcal{S}(C) = B$, што повлекува дека $\mathcal{S}$ ја пресликува опишаната кружница на триаголникот ABC во опишаната кружница на BHC. Конкретно, $\mathcal{S}$ го пресликува центарот O на опишаната кружница околу ABC во центарот S на опишаната кружница околу BHC. **(1п)**

Освен тоа, од $OM \perp BC$ следува дека $OS \perp BC$ и $OM = MS$. Познато е дека $AH = 2 \cdot OM$, што може да се докаже така што ќе се примети дека AO и HM се сечат на кружницата околу ABC во точката H' и дека OM е средна линија во триаголникот AHH'. **(1п)**



Сега можеме да кажеме дека $AH = 2 \cdot OM = OS$. Меѓутоа, $AH \perp BC$ и $OS \perp BC$, што значи дека AH е паралелна со OS. Тоа значи дека $AHSO$ е паралелограм, од каде заклучуваме дека AS минува низ средината E од OH. Имаме дека $AH = AT_a$ од дефиницијата на T_a и $SH = ST_a$ затоа што S е центар на опишаната кружница околу BHC. Заклучуваме дека AS е симетрала на HT_a, но E лежи на правата AS, што значи дека $ET_a = EH$. **(4п)**

Аналогно, добиваме дека $ET_b = ET_c = EH$. Тоа значи дека $ET_a = ET_b = ET_c = EH$, од каде се добива дека $HT_aT_bT_c$ е тетивен со центар во E. **(2п)** □

Решение 2. Тоа што се бара да се докаже е еквивалентно со конкурентноста на симетралите на HT_a, HT_b и HT_c. Тие симетрали се од обликот AO_a (т.е. BO_b, CO_c), каде O_a (т.е. O_b, O_c) е центар на опишаната кружница на $\triangle BHC$ ($\triangle CHA$, $\triangle AHB$). Од синусната теорема имаме $\frac{sin\angle BAO_a}{BO_a} = \frac{sin\angle ABO_a}{AO_a}$ и $\frac{sin\angle CAO_a}{CO_a} = \frac{sin\angle ACO_a}{AO_a}$, **(1п)** при што со делење на последниве два израза и користејќи го фактот дека

$$\angle ABO_a = \angle ABH + \angle HBO_a = 90^\circ - \alpha + \frac{180^\circ - \angle BO_aH}{2} =$$

$$= 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \angle BCH = 90^\circ - \alpha + \beta, \textbf{(2п)}$$

следува $\frac{sin\angle BAO_a}{sin\angle CAO_a} = \frac{sin(90^\circ-\alpha+\beta)}{sin(90^\circ-\alpha+\gamma)}$, а слично добиваме и $\frac{sin\angle CBO_b}{sin\angle ABO_b} = \frac{sin(90^\circ-\beta+\gamma)}{sin(90^\circ-\beta+\alpha)}$ и $\frac{sin\angle ACO_c}{sin\angle BCO_c} = \frac{sin(90^\circ-\gamma+\alpha)}{sin(90^\circ-\gamma+\beta)}$. **(2п)** Со множење на овие три изрази (и користејќи го идентитетот $sin\angle(90^\circ - x) = sin\angle(90^\circ + x)$) добиваме

$$\frac{sin\angle BAO_a}{sin\angle CAO_a} \cdot \frac{sin\angle CBO_b}{sin\angle ABO_b} \cdot \frac{sin\angle ACO_c}{sin\angle BCO_c} = 1,$$

што според тригонометрискиот облик на теоремата на Чева повлекува дека AO_a, BO_b и CO_c се конкурентни, што и требаше да докажеме. **(3п)** □

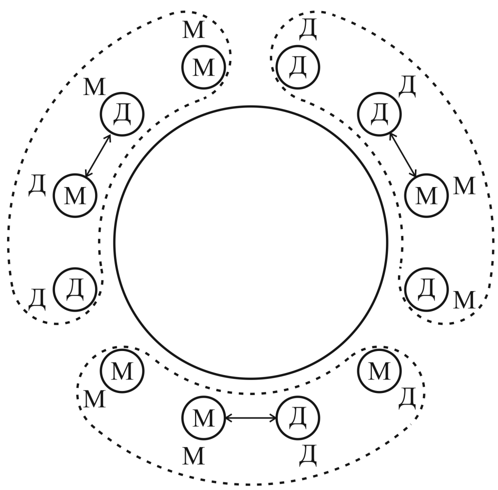
5. Околу тркалезна маса седат n момчиња и n девојчиња, при што $n > 3$. Во секој чекор, две соседни деца може да си ги заменат местата. Под *ентропија* на дадена конфигурација (распоред на седење) се подразбира најмалиот можен број на чекори после што секое дете има барем еден сосед од својот пол. Најдете ја најголемата можна ентропија помеѓу сите конфигурации.

Решение 1. Одговор: $n - 2$.
Велиме дека дете е *осамено* ако нема ниту еден сосед од ист пол, во спротивно велиме дека е *здружено*.
Прво ќе докажеме дека $n - 2$ чекори се неопходни. Да ја разгледаме конфигурацијата со едно осамено девојче и едно осамено момче кои седат на дијаметрално спротивни места. Осаменото момче седи точно во средината помеѓу $n - 1$ последователни девојчиња, а осаменото девојче седи точно во средината помеѓу $n-1$ последователни момчиња. Јасно е дека се потребни барем $n - 2$ чекори да ги здружиме и осаменото момче и осаменото девојче:
Алгоритам 1: ги поместуваме осаменото момче и осаменото девојче еден кон друг се додека меѓу нив има 2 деца од различен пол, за што ни требаат $n - 3$ чекори, и на крај ги замнуваме двете деца во средината. **(1п)**
Да дефинираме *блок* да биде група од барем 2 последователни деца од ист пол. За осамено дете кое седи помеѓу два блока велиме дека е *изолирано*. *Група* е множество на последователни деца.

Го делиме решението во неколку леми.

Лема 1. Наизменична низа со должина $2k$ каде $k > 3$, со ограничување да не ги поместиме крајните деца, може да биде здружена со најмногу $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ чекори, што не надминува $k - 2$.

Доказ. Нека низата е $d_1m_1d_2m_2\dots d_km_k$, при што не смееме да ги поместиме d_1 and m_k. (Тука m означува момче, а d девојче.) Да забележиме дека за $k=2$ одговорот е 1 (размени ги d_2 and m_1). За $k=3$ одговорот е 3. Ќе го докажеме главното тврдење со индукција. За $k=4$ одговорот е 2, третирајќи ја низата како 2 посебни низи, секоја со должина 4, за кои ни треба по 1 чекор. За $k=5$ ни требаат 3 чекори, размени ги m_1 и d_2, m_4 и d_5, и на крајот m_3 и d_3. Нека важи за сите природни броеви помали од k, ќе го докажеме за k: ги игнорираме последните 4 деца најдесно, потоа по индуктивната хипотеза ги здружуваме останатите со $\lceil \frac{k-2}{2} \rceil$ чекори, и за крај уште 1 чекор за последните 4 деца. **(1п)** ⋄



Слика 1. Лема 1 - За $n=6$ потребни се 3 чекори.

Последица. Ако сите $2n$ деца се осамени, доволни се $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ чекори за да ги здружиме. ⋄

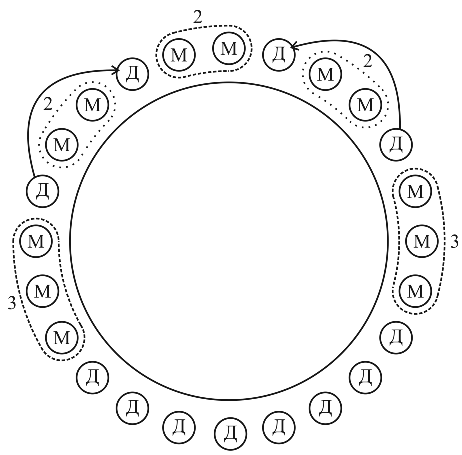
Лема 2. Нека сите осамени деца се од ист пол (на пример девојчиња). Тогаш можеме да ги здружиме со најмногу $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чекори.

Доказ. Нема осамени момчиња, што значи сите припаѓаат на блокови. Ги боиме сите момчиња на еден блок во една боја, сина или црвена, така што последователни дисјунктни блокови момчиња се со различни бои („шаховски“). Една од овие бои, да речеме сина, има најмногу $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ момчиња. Одејќи околу масата, кога ќе сретнеме осамено девојче, го движиме низ синиот лак од момчиња соседен на тоа девојче. Вака ќе направиме најмногу $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чекори да ги здружиме сите девојчиња, бидејќи секое сино момче ќе биде поместено најмногу еднаш, а црвените момчиња воопшто не се движат. ⋄

Да нагласиме дека „средбите“ („здружувањата“) секогаш се случуваат на краевите на сините лаци, за да избегнеме раздвојување на момчиња кои се веќе здружени. Со други зборови, кога здружуваме 2 деца, едно од нив воопшто не се поместува.
Понатаму, претпоставуваме дека има најмалку едно осамено момче и едно осамено девојче.

Лема 3. Маса без алтернирачка низа подолга од 2 може да се здружи во $n-2$ чекори.

Доказ. За даден блок деца велиме дека е *ограда* ако барем до еден негов крај се наоѓа осамено дете. Нека O_m е бројот на момчиња кои припаѓаат на огради, O_d бројот на девојчиња на огради, S_m бројот на сами момчиња и S_d бројот на сами девојчиња. Јасно $O_m + S_m \leq n$ и $O_d + S_d \leq n$. Бидејќи нема наизменична низа, секое осамено дете е изоирано. Исто така, имаме have $S_m \geq 1$



Слика 2. Лема 2 - Во групите заокружени со ⋯⋯ има вкупно 4 момчиња, а во групите заокружени со $----$ има вкупно 8 момчиња. При оваа конфигурација, за $n = 12$ и 4 осамени девојчиња, имаме решение во 4 чекори.

and $S_d \geq 1$. На ист начин како во Лема 2 може да се докаже дека сите момчиња може да се здружат со $\left\lfloor \frac{O_d}{2} \right\rfloor$ чекори, и сите осамени девојчиња со $\left\lfloor \frac{O_m}{2} \right\rfloor$ чекори. Во овој процес треба да се внимава да се одбегне двојно броење, т.е. изолирано дете да не стане дел од ограда. За ова го користиме истиот пристап од Алгоритам 1: ако изолирано девојче и изолирано момче се движат еден кон друг, ги запираме кога меѓу нив остануваат 2 деца од различен пол, и потоа ги разменуваме овие 2 деца во средината.
Ако $S_m \geq 2$ или $S_d \geq 2$, потребниот број на чекори не надминува $\left\lfloor \frac{O_m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{O_d}{2} \right\rfloor < n - 1$.
Ако $S_m = 1$ и $S_d = 1$:
- Ако $O_m + O_d < 2n - 2$, $\left\lfloor \frac{O_m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{O_d}{2} \right\rfloor < n - 1$
- Ако $O_m + O_d = 2n - 2$, во најлош случај ни требаат $n - 2$ чекори како во Алгоритам 1.
Ова го комплетира доказот на Лема 3. **(1п)** ⋄

Можен е алтернативен доказ преку концептот на супер-пријател, дефиниран подолу. Овде индуктивниот чекор би го правеле заменувајќи едно момче и едно девојче кои се соседни и се наоѓаат на краевите на два блока од различен пол со супер-пријател (на пример во $d_1d_2d_3b_1b_2b_3b_4$, место d_3 и b_1 вметнуваме супер-пријател).
Да дефинираме *супер-пријател* да биде дете кое ги прави двата негови соседа здружени независно од нивниот пол. Во спротивно, велиме дека детето е *обично* (вообичаено момче или девојче). Да забележиме дека во оптималното решение никогаш не мораме да ги поместуваме супер-пријателите.

Сега сме подготвени за финалната лема.

Лема 4. Маса со $2n$ обични деца може да биде здружена со $n - 2$ чекори, при што $n > 3$. Ако има супер-пријатели, не мора да бидат поместени во процесот.

Доказ. Индукција по n. Тврдењето важи за $n = 4$, нека важи за сите природни броеви помали од n ќе го докажеме за n.
Ако нема наизменична низа, доказот е готов според Лема 3. Во спротивно, ја земаме најдолгата можна парна наизменична низа која не може од ниту еден крај да биде продолжена и да остане парна наизменична низа, нека нејзината должина е $2a$ и ја заменуваме со супер-пријател.
- Ако $n - a > 3$, по индуктивната хипотеза овие $2(n - a)$ деца може да се здружат со $n - a - 2$ чекори. Потоа ја ставаме наизменичната низа на местото на супер-пријателот. Ако ова креира осамени деца соседни до алтернирачката низа, ги додаваме овие деца на низата заедно со

нивниот сосед, за да се зачува парноста. Добиената низа има најмногу $2a+4$ деца, и ако овој број е поголем од 6 може да ја здружиме во најмногу $\lceil \frac{a+2}{2} \rceil \leq a$ чекори според Лема 1 без да ги поместиме нејзините крајни точки. Значи севкупно $(n-a-2)+a = n-2$ чекори. Ако наизменичната низа е „мала“ (најмногу 6 деца), можеме да ја здружиме со a чекори, и повторно добиваме $(n-a-2)+a = n-2$.

- Ако $n-a = 0$, целата маса е наизменична низа, па според Лема 1 ни требаат најмногу $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq n-2$ чекори.
- Ако $n-a = 1$, имаме дека $a > 3$, па според Лема 1 наизменичната низа може да биде здружена со $a-1 = n-2$ чекори. Не ни требаат дополнителни чекори, бидејќи од конструкцијата на алтернативната низа знаеме дека имаме ситуација $d_1|d_2m_1\ldots m_{n-1}|m_n$, каде наизменичната низа е помеѓу $|$. Со оглед дека не ги поместуваме d_2 and m_{n-1} (крајните членови во наизменична низа не се поместуваат), d_1 и m_n почнуваат здружени и остануваат до крајот на процесот.
- Доколку $n-a = 2$, имаме две можни сценарија:

1. $d_1d_2|d_3m_1\ldots m_{n-2}|m_{n-1}m_n$ (каде d_1 и m_n се соседни), па тогаш доволно е да ја здружиме наизменичната низа, што се постигнува во најмногу $a = n-2$ чекори. Аналоген е случајот $d_1d_2|m_1d_3m_2\ldots d_n|m_{n-1}m_n$.
2. $d_1m_1|m_2d_2\ldots d_{n-1}|d_nm_n$ при што m_1, d_1, m_n и d_n формираат наизменична низа, и за нив ни треба само 1 чекор (ги разменуваме d_1 и m_n). Исто така, да забележиме дека краевите на наизменичната низа се веќе здружени. Ако $a = 3$, ни треба 1 чекор за наизменичната низа, значи вкупно 2. Во спротивно, $\lceil \frac{a}{2} \rceil + 1 < a = n-2$

- Ако $n-a = 3$, имаме 3 различни ситуации:

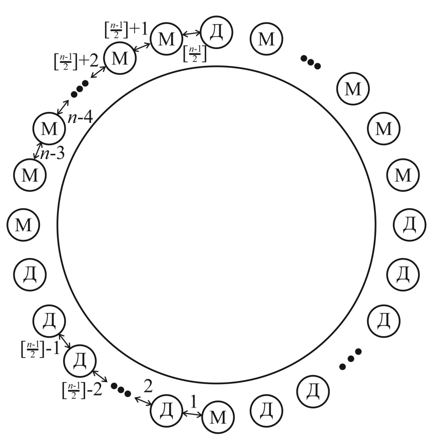
1. $a = 1$ и $a = 2$ се тривијални.
2. Ако $a > 3$ прво го здружуваме остатокот од масата, за што ни требаат најмногу 3 чекори. Потоа за наизменичната низа ни требаат $\lceil \frac{a}{2} \rceil <= a-2$ чекори, вкупно $(a-2)+3 = n-2$ чекори.
3. Ако $a = 3$ лесно се проверува дека 4 чекори ни се доволни: прво 2 за не-наизменичната низа, потоа уште 2 за наизменичната. Нека низата е $x|m_1d_1m_2d_2m_3d_3|y$, можни се следните случаи:

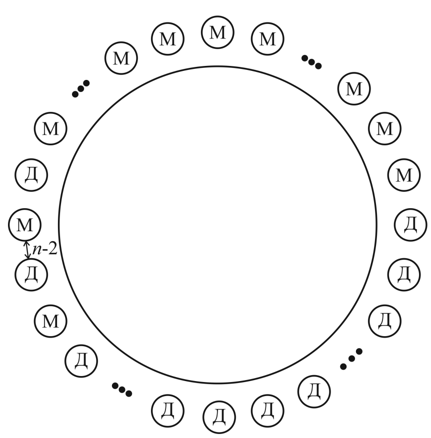
3.а Доколку x и y се од различен пол, x мора да е момче и y девојче, според конструкцијата на максималната наизменична низа. Потребни ни се најмногу 2 чекора за четирите деца помеѓу x и y, потоа ги разменуваме d_2 и m_2, што ги здружува сите деца, бидејќи m_1 и d_3 се веќе здружени.

3.б Доколку x и y се од ист пол (на пример машки), имаме $m_0|m_1d_1m_2d_2m_3d_3|m_4$. Ги разменуваме d_1 и m_2, а потоа d_3 и m_3. Понатаму, два чекора ни се довоолни да ги здружиме четирите деца помеѓу m_0 и m_4, од кои 3 се девојчиња и едно момче.

Ова ги покрива сите случаи и лемата е докажана. **(5п)** ⋄

□



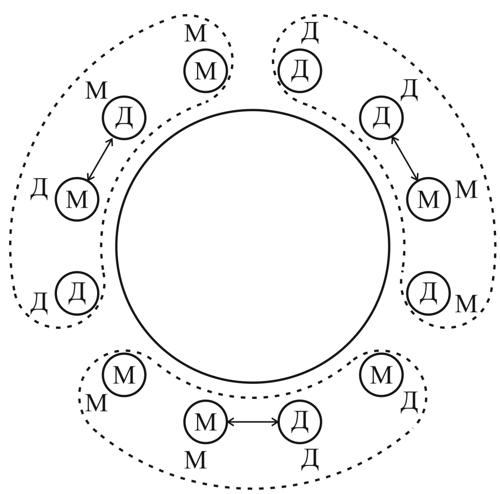


Забелешки. Се доделува 1 поен за точен одговор со пример, 1 поен за Лема 1, 1 поен за пресметките во Лема 3, 5 поена за Лема 4, која е главниот дел на решението. Делумно решение без индуктивното размислување од Лема 4 (или еквивалентно) не може да добие повеќе од 4/8 поена.

Решение 2. Одговор: $n-2$.
Велиме дека дете е *осамено* ако нема ниту еден сосед од ист пол, во спротивно велиме дека е *здружено*.
Прво ќе докажеме дека $n-2$ чекори се неопходни. Да ја разгледаме конфигурацијата со едно осамено девојче и едно осамено момче кои седат на дијаметрално спротивни места. Осаменото момче седи точно во средината помеѓу $n-1$ последователни девојчиња, а осаменото девојче седи точно во средината помеѓу $n-1$ последователни момчиња. Јасно е дека се потребни барем $n-2$ чекори да ги здружиме и осаменото момче и осаменото девојче:
Алгоритам 1: ги поместуваме осаменото момче и осаменото девојче еден кон друг се додека меѓу нив има 2 деца од различен пол, за што ни требаат $n-3$ чекори, и на крај ги заменуваме двете деца во средината. **(1п)**
Да дефинираме *блок* да биде група од барем 2 последователни деца од ист пол. За осамено дете кое седи помеѓу два блока велиме дека е *изолирано*. *Група* е множество на последователни деца.

Го делиме решението во неколку леми.

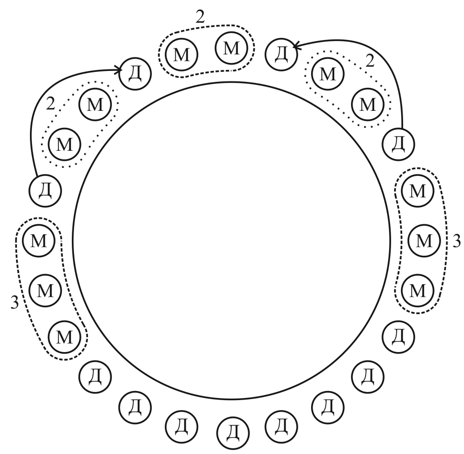
Лема 1. Ако сите $2n$ деца се осамени, можеме да ги здружиме во најмногу $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ чекори.
Доказ. Одејќи околу масата во насока на стрелките на часовникот, секогаш кога ќе сретнеме осамено момче, го разменуваме со девојчето до него во наоска на стрелките на часовникот ако е осамено, во спротивно со другото девојче. Секој ваков чекор освен можеби последниот го смалува бројот на осамени деца за 4, така што нема да ни требаат повеќе од $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ чекори, кој не надминува $n-2$ за $n>3$.
Еквивалентно решение: ги делиме децата на групи по 4, во секоја група ги разменуваме средните 2 деца. Ако n е парен, завршуваме во $\frac{n}{2}$ чекори, ако n е непарен, ни требаат $\frac{2n+2}{4} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ чекори. ◇



Слика 3. Лема 1 - За $n=6$ потребни се 3 чекори.

Лема 2. Нека сите осамени деца се од ист пол (на пример девојчиња). Тогаш можеме да ги здружиме со најмногу $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чекори.

Доказ. Нема осамени момчиња, што значи сите припаѓаат на блокови. Ги боиме сите момчиња на еден блок во една боја, сина или црвена, така што последователни дисјунктни блокови момчиња се со различни бои („шаховски“). Една од овие бои, да речеме сина, има најмногу $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ момчиња. Одејќи околу масата, кога ќе сретнеме осамено девојче, го движиме низ синиот лак од момчиња соседен на тоа девојче. Вака ќе направиме најмногу $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ чекори да ги здружиме сите девојчиња, бидејќи секое сино момче ќе биде поместено најмногу еднаш, а црвените момчиња воопшто не се движат. **(1п)** ⋄



Слика 4. Лема 2 - Во групите заокружени со ⋯⋯ има вкупно 4 момчиња, а во групите заокружени со – – – – има вкупно 8 момчиња. При оваа конфигурација, за $n = 12$ и 4 осамени девојчиња, имаме решение во 4 чекори.

Да нагласиме дека „средбите“ („здружувањата“) секогаш се случуваат на краевите на сините лаци, за да избегнеме раздвојување на момчиња кои се веќе здружени. Со други зборови, кога здружуваме 2 деца, едно од нив воопшто не се поместува.
Понатаму, претпоставуваме дека има најмалку едно осамено момче и едно осамено девојче.
Од ова следи дека има барем еден блок момчиња. Има 3 можни структури кои може да се најдат помеѓу 2 последователни блока момчиња (овие 2 блока не мора да се различни, ако има само 1 блок момчиња):
- Единствено осамено (изолирано) девојче.
- Блок девојчиња (очигледно никогаш не мора да се поместат во оптималното решение).
- Множество деца меѓу кои има барем 1 осамено момче, и нема здружени момчиња. Оваа структура ќе ја наречеме *сектор*.

Еве пример за сектор: mmmm | *ddmdmdddmd* | *mmmmm*. Конкретно, низата деца помеѓу двете | сочинува сектор. Да забележиме дека крајните деца во секторот се девојчиња, во спротивно не би припаѓале на секторот, а на соседните блокови. Од дефиницијата следи дека сите момчиња на еден сектор се осамени. Велиме дека сектор станува *здружен* кога сите осамени деца на него ќе станат здружени. Нека севкупниот број на момчиња кои припаѓаат на блокови е B.

Лема 3. Сите изолирани девојчиња може да бидат здружени во $\left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor$ чекори.
Доказ. Истиот пристап со наизменично боење на блоковите момчиња како Лема 2. ⋄

(0п - иста идеја како Лема 2)

Подоцна како конечен чекор ќе го докажеме следното тврдење, кое во меѓувреме го користиме да го комплетираме решението:

Објавено на 12.4.2024

Тврдење 1. Сектор со d девојчиња може да се здружи во $\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$ чекори. При тоа, најчесто доволни се $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ чекори, освен во случајот кога имаме наизменична низа со непарен број на девојчиња, на пример dmdmdmdmd. Во овој случај мора да има барем 2 момчиња, бидејќи има барем 3 девојчиња.

Да го означиме со D_s вкупниот број на девојчиња на сектори, и нека има k наизменични сектори за кои ни треба горната граница на бројот на чекори со „таван“ (значи со барем 2 момчиња), и l останати сектори (со барем 1 момче). Нека d_i е бројот на изолирани девојчиња. Тогаш важи $D_s + d_i \leq n$. Исто така, вкупниот број на момчиња на блокови $B \leq n - 2k - l$. За вкупниот број на неопходни чекори C сакаме да докажеме дека $C \leq n - 2$. Според Лема 3 и Тврдење 1 важи

$$C \leq \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor + \frac{D_s}{2} + \frac{k}{2} \leq \frac{n-2k-l}{2} + \frac{n-d_i}{2} + \frac{k}{2} \leq n - \frac{k+d_i+l}{2}. \tag{1}$$

Ако $d_i = 0$, тогаш не ни требаат $\left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor$ чекори да ги социјализираме изолираните девојчиња (бидејќи такви нема), па имаме решение во најмногу $\left\lceil \frac{D_s}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq n-2$ чекори.
Понатаму нека $d_i \geq 1$. Знаеме дека $k + l \geq 1$ бидејќи има барем едно осамено момче. Единствен начин да добиеме $C > n - 2$ е ако $k + d_i + l = 2$, и при тоа $d_i = 1$ и $k + l = 1$. Ова значи дека неравенствата (1) стануваат равенства, па имаме $B = D_S = n - 1$, па имаме едно изолирано девојче и едно осамено момче. Равенство може да важи само во сценариото опишано во Алгоритам 1, но тогаш знаеме дека $n-2$ чекори ни се доволни.
Во овој процес треба да се внимава да се одбегне двојно броење, на пример изолирано девојче непланирано да стане дел од сектор, или осамено момче да стане дел од блок. За ова го користиме истиот пристап од Алгоритам 1: ако изолирано девојче и осамено момче се движат еден кон друг, ги запираме кога меѓу нив остануваат 2 деца од различен пол, што создава наизменична низа, во која разменуваме оптимален број на парови. Така заштедуваме 1 чекор на итерацијата на блокот момчиња, но во исто време додаваме 1 девојче во блокот, па вкупниот број на чекори не расте. **(1п)**

Конечно ќе го докажеме Тврдењето 1 во три леми од растечки опсег.

Лема 4. Сектор со r девојчиња, од кои ниту едно не е осамено, и 1 момче, може да се здружи со $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ чекори.

Доказ. Имаме 2 блока девојчиња, и осаменото момче поминува низ пократкиот од нив за да се здружи со друго момче. ⋄

Лема 5. Сектор со r девојчиња, од кои ниту едно не е осамено, може да се здружи со $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ чекори.

Доказ. Истиот пристап како Лема 2: ги боиме наизменично блоковите девојчиња. ⋄

Лема 6. Сектор со r девојчиња може да се здружи во $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ чекори, освен во случајот на наизменична низа со r непарен, за кој ни требаат $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ чекори.

Доказ. Ако сите девојчиња се осамени, тогаш го добиваме одговорот со ист пристап како Лема 1. Во спротивно, имаме барем еден блок од девојчиња, па бројот на момчиња е најмногу $r-2$.
Пристапуваме со индукција по r, јасно $r \geq 2$. Тврдењето лесно се проверува за $r = 2$ и $r = 3$. Да претпоставиме дека важи за сите природни броеви помали од r, ќе го докажеме за r.
Ако нема осамено девојче во внатрешноста на секторот (единствено можеби на рабовите), го добиваме решението на ист начин како Лема 5, при што водиме сметка да ги поместиме осамените момчиња соседни до осамените девојчиња, што ги здружува и девојчињата, па не ни требаат додатни чекори (секоагш кога здружуваме 2 осамени деца, имаме избор кое од нив

го движиме кон другото).
Во спротивно, ако има осамено девојче во внатрешноста, да го означиме најлевото од нив со D_L, нека d_1 е најлевото девојче во секторот, а d_r најдесното:

$$|d_1 \cdots m d d M_L D_L M_R \ \# \ d \cdots d_r| .$$

(# означува сепаратор)

Нека лево од # има a девојчиња, а десно b, при што $a + b = r$.
Најпрво го разгледуваме случајот $b > 1$. Момчињата во левиот дел може да се здружат во $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ чекори, по истиот принцип како Лема 2. При тоа, да забележиме дека овој дел има најмногу 2 осамени девојчиња (D_L и можеби d_1), кои автоматски ќе бидат здружени без дополнителни чекори (ако d_1 е осамено, го поместуваме момчето кое на почетокот седи десно од d_1). Исто така, при тоа водиме сметка да не го поместиме M_R. Бидејќи $b > 1$, на овој начин десно од # добиваме нов помал сектор за кој можеме да ја примениме индуктивната хиотеза. Добиваме дека вкупниот број на чекори е најмногу $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{a+b}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$, како што посакуваме.
Доколку $b = 1$, секторот изгледа вака:

$$|d_1 \cdots m d d M_L D_L M_R d_r| ,$$

па во првиот чекор ги разменуваме D_L и M_R и добиваме $|d_1 \cdots m d d M_L M_R D_L d_r|$. Со овој **еден** чекор елиминиравме **две** девојчиња (D_L и d_r) и добивме помал сектор лево од M_L, па може да продолжиме по индуктивната хипотеза.
Ако пак $b = 0$, тогаш $a = r$ и тврдењето важи бидејќи го здружуваме целиот сектор со $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ чекори. **(5п)** ⋄

□

Забелешки. Се доделува 1 поен за точен одговор со пример, 1 поен за Лема 1 + Лема 2 (или еквивалентна со наизменично боење), 1 поен за пресметките кои ја даваат границата $n - 2$, 5 поена за Лема 6, која е главниот дел на решението. Делумно решение без индуктивното размислување од Лема 6 (или еквивалентно) не може да добие повеќе од 4/8 поена.

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2024

Недела, 21. Април 2024

Задача 1. Во дадена група луѓе $\mathcal{F}$ секој член има барем двајца познаници од $\mathcal{F}$. Притоа, за секој циклус $A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow A_1$ во $\mathcal{F}$ (тука '$X \leftrightarrow Y$' означува дека X и Y се познаници) секој A_i познава точно два други A_j-овци. Докажете дека постојат $X, Y \in \mathcal{F}$ такви што секој од нив има точно два познаника во $\mathcal{F}$ и X, Y имаат барем еден заеднички познаник во групата.

Задача 2. Нека D и E се произволни точки од страните BC и AC, соодветно, во $\triangle ABC$. Опишаната кружница на $\triangle ADC$ по втор пат ја сече опишаната кружница на $\triangle BCE$ во точка F. Правата FE ја сече AD во точка G, а правата FD ја сече BE во точка H. Докажете дека правите CF, AH и BG се сечат во една точка.

Задача 3. Нека $p \neq 5$ е прост број. Докажете дека $p^5 - 1$ има прост делител q од облик $5x + 1$.

Задача 4. Нека $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ се реални броеви од интервалот $[1, 2]$. Докажете дека

$$|x_1 - x_2| + \cdots + |x_n - x_1| + \frac{1}{3}\left(|x_1 - x_3| + \cdots + |x_n - x_2|\right) \leq \frac{2}{3}\left(x_1 + \cdots + x_n\right)$$

и определете во кои случаи важи равенство.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2024

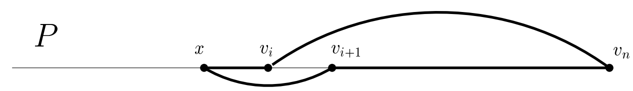
РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

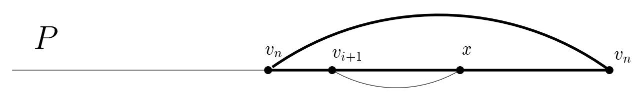
1. Во дадена група луѓе $\mathcal{F}$ секој член има барем двајца познаници од $\mathcal{F}$. Притоа, за секој циклус $A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow A_1$ во $\mathcal{F}$ (тука '$X \leftrightarrow Y$' означува дека X и Y се познаници) секој A_i познава точно два други A_j-овци. Докажете дека постојат $X, Y \in \mathcal{F}$ такви што секој од нив има точно два познаника во $\mathcal{F}$ и X, Y имаат барем еден заеднички познаник во групата.

Решение. Нека G е придружениот едноставен граф: темињата се членовите на $\mathcal{F}$ и секој (неподреден) пар познаници е поврзан со ребро. Од условите имаме дека минималниот степен $\delta(G) \geq 2$ и секој циклус во G е индуциран (т.е., без тетиви). Разгледуваме пат $P : v_1 v_2 \dots v_n$ од најголема можна должина. **(1п)** Со оглед дека $\deg(v_n) \geq 2$, постои $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ така што $v_i \leftrightarrow v_n$. **(1п)** Притоа, од изборот на P, секој сосед на v_n лежи на P. **(1п)** Следствено, користејќи дека секој циклус е индуциран, $N(v_n) = \{v_i, v_{n-1}\}$; значи $\deg(v_n) = 2$. **(1п)**

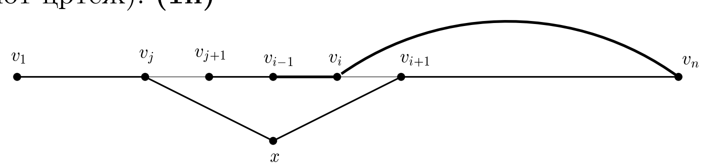
Ќе докажеме дека $\deg(v_{i+1}) = 2$. **(1п)**

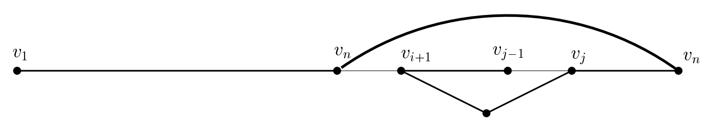
Аргументираме со противречност. Имено, да претпоставиме дека постои $x \in N(v_{i+1}) \backslash \{v_i, v_{i+2}\}$. Тогаш $x \notin V(P)$, во спротивно се појавува циклус со тетива (прикажан задебелено на долниот цртеж). **(1п)**





Бидејќи $\deg(x) \geq 2$, постои теме $y \in N(x) \backslash \{v_{i+1}\}$. **(1п)** Да забележиме дека $y \in V(P)$, во спротивно патот $Q : v_1 v_2 \dots v_i v_n v_{n-1} \dots v_{i+1} x y$ има должина $n+1$, што противречи на изборот на P. **(1п)** Значи $y = v_j$, и притоа има две можности: $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$ или $j \in \{i+2, \dots, n-1\}$. Но секоја од двете можности противречи на изборот на P (постои пат со должина $n+1$, прикажан задебелено на долниот цртеж). **(1п)**



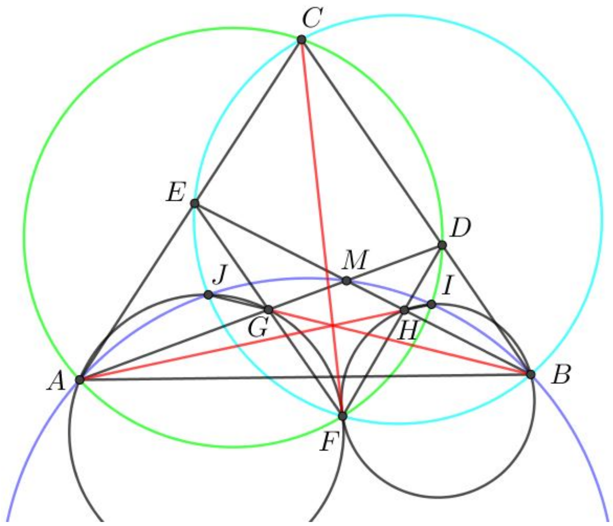


Значи $X = v_{i+1}$ и $Y = v_n$ го формираат посакуваниот пар. **(1п)** $\square$

Забелешка. Дадениот доказ всушност потврдува постоење на барем два такви пара X, Y, со оглед дека $v_1 \notin \{v_{i+1}, v_n\}$.

2. Нека D и E се произволни точки од страните BC и AC, соодветно, во $\triangle ABC$. Опишаната кружница на $\triangle ADC$ по втор пат ја сече опишаната кружница на $\triangle BCE$ во точка F. Правата FE ја сече AD во точка G, а правата FD ја сече BE во точка H. Докажете дека правите CF, AH и BG се сечат во една точка.

Решение. Нека правата AH ја сече опишаната кружница на $\triangle ADC$ во точката I, а правата BG ја сече опишаната кружница на $\triangle BCF$ во точката J. Нека M е пресечната точка на правите AD и BE.



Бидејќи петаголниците $AFIDC$ и $BCEJF$ се тетивни, користејќи ја Талесовата теорема за периферен агол, добиваме:

$$\angle FAG \equiv \angle FAD = \angle FCD \equiv \angle FCB = \angle FJB \equiv \angle FJG\,,$$

од каде следува дека четириаголникот $AFGJ$ е тетивен. **(2п)** Аналогно се докажува дека и четириаголникот $BFHI$ е тетивен. **(2п)**
Од последново и од тетивноста на $BCEJF$ добиваме:

$$\angle MAJ \equiv \angle GAJ = \angle GFJ \equiv \angle EFJ = \angle EBJ \equiv \angle MBJ\,.$$

Значи и четириаголникот $ABMJ$ е тетивен. **(2п)**
Аналогно се докажува дека и четириаголникот $ABIM$ е тетивен **(2п)**, од каде следува дека точката I лежи на опишаната кружница околу четириаголникот $ABMJ$. **(1п)**
Имајќи предвид дека BJ е радикална оска за $(BCEJF)$ и $(ABIMJ)$, AI е радикална оска за $(ABIMJ)$ и $(AIDC)$ и CF е радикална оска за $(AIDC)$ и $(BCEJF)$, заклучуваме дека правите BJ, CF и AI се сечат во една точка. **(1п)** $\square$

3. Нека $p \neq 5$ е прост број. Докажете дека $p^5 - 1$ има прост делител q од облик $5x + 1$.

Решение. Прво ќе докажеме дека равенката $p^5 - 1 = (p-1) \cdot 5^x$ нема природни решенија. Забележуваме дека

$$\frac{p^5-1}{p-1} = p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 > 5.$$

Оттука ако (p, x) е решение, тогаш $25|5^x$, па $25|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$. Според ова $5|p^5 - 1$, што важи само кога $p \equiv 1 \pmod 5$ бидејќи $p^4 \equiv 1 \pmod 5$ за секој прост број $p \neq 5$.

Од претходната дискусија, имаме дека $25|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ повлекува $p \equiv 1, 6, 11, 16, 21 \pmod{25}$. Со директна замена во $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ добиваме дека во ниту еден случај не се добива број делив со 25. **(5п)**

Според ова постои прост број $q \neq 5$ таков што $q|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$. Според ова $q|p^5 - 1$, па $p^5 \equiv 1 \pmod q$. Ако $t = \operatorname{ord}_q(p)$ (најмалиот природрн број за кој $q \mid p^t - 1$), тогаш $t \in \{1, 5\}$. За $t = 1$, важат $q|p - 1$ и $q|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$, па

$$0 \equiv p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 5 \pmod q,$$

последното не е можно бидејќи $q \neq 5$. Заклучуваме дека $t = 5$. Од малата теорема на Ферма следува дека $5|q - 1$, т.е. $q = 5x + 1$ и $q|p^5 - 1$. **(5п)** □

4. Нека $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ се реални броеви од интервалот $[1, 2]$. Докажете дека

$$|x_1 - x_2| + \cdots + |x_n - x_1| + \frac{1}{3}\left(|x_1 - x_3| + \cdots + |x_n - x_2|\right) \leq \frac{2}{3}\left(x_1 + \cdots + x_n\right)$$

и определете во кои случаи важи равенство.

Решение. За доказот ќе го користиме следното:

Неравенство. *Ако $a, b, c, d \in [1, 2]$, тогаш*

(1) $$|a - b| + |b - c| + |c - d| + \frac{1}{2}|a - c| + \frac{1}{2}|b - d| \leq \frac{1}{2}(a + b + c + d),$$

(4п)

со равенство ако и само ако (a, b, c, d) е една од четворките

(2) $$(2, 1, 1, 2), (x, 1, 2, 1), (1, y, 2, 1), (1, 2, z, 1), (1, 2, 1, t),$$

за некои $x, y, z, t \in [1, 2]$.

(1п)

Доказ. Со помош на равенството $|x - y| = x + y - 2\min(x, y)$ бараното неравенство (1) се трансформира во

$$a + 2b + 2c + d \leq 2\min(a, b) + 2\min(b, c) + 2\min(c, d) + \min(a, c) + \min(b, d).$$

Разгледуваме четири можности: $a \geq b$ и $a \geq c$, $a \geq b$ и $a < c$, $a < b$ и $a \geq c$, $a < b$ и $a < c$.

- Ако $a \geq b$ и $a \geq c$ неравенството се поедноставува до

  $$a + |c - d| \leq 2\min(b, c) + \min(b, d).$$

  Ова е точно бидејќи $a \leq 2 \leq 2\min(b, c)$ и $|c - d| \leq 1 \leq \min(b, d)$. Равенство важи ако и само ако $a = 2$, $\{c, d\} = \{1, 2\}$ и $b = 1$, т.е. за (a, b, c, d) еднакво на $(2, 1, 1, 2)$ или $(2, 1, 2, 1)$.
- Ако $a \geq b$ и $a < c$, тогаш $b < c$, па неравенството се поедноставува до

  $$c + |c - d| \leq 2b + \min(b, d).$$

  Ова е точно бидејќи $c \leq 2 \leq 2b$ и $|c - d| \leq 1 \leq \min(b, d)$. Равенство се достигнува ако и само ако $b = 1$, $c = 2$ и $d = 1$, па $(a, b, c, d) = (x, 1, 2, 1)$ за некој $x \in [1, 2]$.

- Ако $a < b$ и $a \geq c$, тогаш $c < b$ и неравенството се поедноставува до
$$2b + d \leq a + 2\min(c,d) + c + \min(b,d).$$
ова е точно бидејќи $2b + d - \min(b,d) \leq 4$, $a \geq 1$, $\min(c,d) \geq 1$ и $c \geq 1$. Равенство ќе важи ако и само ако $a = 1$, $b = 2$ и $c = 1$, so $(a,b,c,d) = (1,2,1,t)$ за некое $t \in [1,2]$.
- Ако $a < b$ и $a < c$ тогаш неравенството се поедноставува во
$$2b + 2c + d \leq 2a + 2\min(b,c) + 2\min(c,d) + \min(b,d).$$
Ако $b \geq c$ добиваме $2b+d \leq 2a+2\min(c,d)+\min(b,d)$, што е точно бидејќи $2b+d-\min(b,d) \leq 4 \leq 2a+2\min(c,d)$. Во овој случај равеснтво важи ако само ако $a = 1$, $b = 2$ и $\min(c,d) = 1$, па бидејќи $a < c$ мора $d = 1$, т.е. $(a,b,c,d) = (1,2,z,1)$ за некое $z \in [1,2]$.
Ако пак $b < c$, тогаш $a < b < c$, и имаме $c + |c-d| \leq 2a + \min(b,d)$, што е точно бидејќи $c + |c-d| \leq 3 \leq 2a + \min(b,d)$. Равенство во овој случај ќе важи ако и само ако $a = 1$, $c = 2$ и $d = 1$, па $(a,b,c,d) = (1,y,2,1)$ за некое $y \in [1,2]$. $\square$

Да се вратиме на даденото неравенство. Со примена на (1) за $(x_1,x_2,x_3,x_4),\dots,(x_n,x_1,x_2,x_3)$, после делење на нивниот збир со 3, добиваме
$$|x_1 - x_2| + \dots + |x_n - x_1| + \frac{1}{3}\left(|x_1 - x_3| + \dots + |x_n - x_2|\right) \leq \frac{2}{3}\left(x_1 + \dots + x_n\right).$$
(2п)

Равенство ќе важи ако секоја од четворките $(x_1,x_2,x_3,x_4),\dots,(x_n,x_1,x_2,x_3)$ се од некој облик од (2). Не може да се појави четворка $(x,1,2,1)$ со $1 < x < 2$ бидејќи тогаш претходната четворка (циклично) мора да биде $(*,x,1,2)$, што не е дозволено. Слично, не може да се појави $(1,y,2,1)$ за $1 < y < 2$, бидејќи претходната четворка (циклично) мора да биде $(*,1,y,2)$. Не може да се појави $(1,2,z,1)$ за $1 < z < 2$, бидејќи претходната четворка (циклично) мора да биде $(*,1,2,z)$. Не може да се појави $(1,2,1,t)$ за $1 < t < 2$, бидејќи следната четворка (циклично) мора да биде $(2,1,t,*)$. За крај, не може да се појави $(1,2,2,1)$, бидејќи претходната четворка (циклично) мора да биде $(*,1,2,2)$. Заклучуваме дека равенство важи ако и само ако четворките $(x_1,x_2,x_3,x_4),\dots,(x_n,x_1,x_2,x_3)$ се меѓу
$$(2,1,1,2),(1,1,2,1),(2,1,2,1),(1,2,1,1),(1,2,1,2),$$
т.е. ако и само ако $x_i \in \{1,2\}$ за секој $i \in \{1,\dots,n\}$ и меѓу нив нема две последователни двојки (циклично) ниту три последователни единици (циклично). **(3п)** $\square$