Šefket Arslanagić (Trebinje)

O NEKIM KONSTRUKCIJAMA POMOĆU ŠESTARA

Navikli smo rješavati konstruktivne zadatke pomoću šestara i lenjira. Međutim, dokazano je da se sve konstrukcije koje se mogu izvršiti pomoću šestara i lenjira mogu izvršiti i samo pomoću šestara (uz uslov da se svaka prava smatra konstruisanom ako su konstruisane dve tačke kroz koje ona prolazi).

Zbog toga ćemo ovde pokazati tri konstrukcije.

Primjer 1. — *Zadata je duž AB, tako da su poznate tačke A i B (sl. 1). Samo upotrebom šestara odrediti središte duži AB.*

Konstrukcija. Pretpostavimo da je $AB=1$. Tada se konstruišu:

1) Kružnica $k_1(B, 1)$. — 2) Tačke A_1, A_2 i A_3 na kružnici k_1, tako da je $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=1$. — 3) Kružnica $k_2(A, 2)$ koja prolazi tačkom A_3. — 4) Tačke A_4 i A_5, tako da je $A_3A_4=A_3A_5=A_3A_1=\sqrt{3}$. — 5) Tačka S, tako da je $A_4S=A_5S=\sqrt{3}$.

Dokazaćemo da je S središte duži AB.

Dokaz. — Prije svega jasno je da je $A_3A_1=\sqrt{3}$, jer iz $\triangle AA_3A_1$ po Pitagorinoj teoremi:

$$A_3A_1^2=AA_2^3-AA_1^2,\ \text{tj.}\ A_3A_1^2=2^2-1^2=3,\ \text{tj.}\ A_3A_1=\sqrt{3}.$$

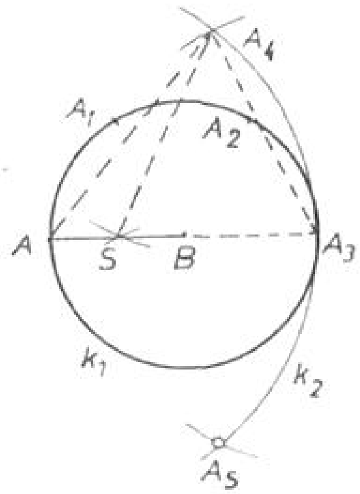
Dalje imamo:

$$\triangle AA_4A_3 \backsim \triangle A_3A_4S,\ \text{jer je}\ AA_3=AA_4=2,\ A_3A_4=A_4S=\sqrt{3},$$
$$\measuredangle AA_3A_4=\measuredangle SA_3A_4.$$

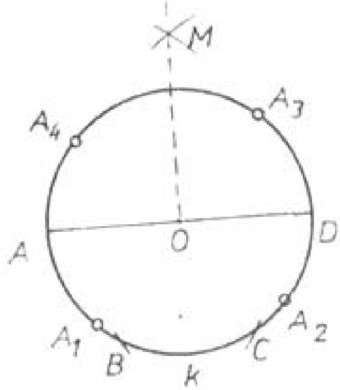
Iz sličnosti tih jednakokrakih trouglova dobijamo:

$$A_3S:A_3A_4=SA_4:AA_4,\ \text{tj.}\ A_3S:\sqrt{3}=\sqrt{3}:2,\ \text{odakle je}\ A_3S=\frac{3}{2}.$$

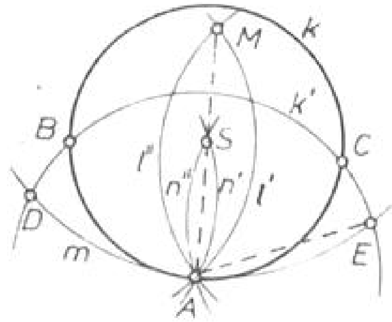
Dakle, $AS=SB=\dfrac{1}{2}$.



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

P r i m j e r 2. — *Zadata je kružnica $k(0, r)$. Samo upotrebom šestara podjeliti je na četiri jednaka dijela**.

Konstrukcija. — 1) Od proizvoljne tačke A na datoj kružnici (sl. 2) prenesemo tri puta uzastopce kao tetivu kružnice poluprečnik r, te dobijamo tačke B, C i D. — 2) Iz tačaka A i D poluprečnikom AC opišemo kružne lukove koji se sijeku u tački M. — 3) Izabiremo na kružnici k proizvoljnu tačku A i, polazeći od nje, otvorom šestara MO obilježimo uzastopno na kružnici još 3 tačke A_2, A_3, A_4.

Dokazaćemo da ove četiri tačke dijele kružnicu na četiri jednaka dijela.

Dokaz. — Kako je $AC^2 = AD^2 - CD^2$, to je $AC^2 = \sqrt{(2r)^2 - r^2}$, odakle slijedi $AC = r\sqrt{3}$.

Iz $\triangle AMO$ dobijamo: $MO^2 = AM^2 - AO^2$, tj. $MO^2 = (r\sqrt{3})^2 - r^2$, odakle slijedi $MO = r\sqrt{2}$.

Kako merni broj stranice kvadrata upisanog u krug poluprečnika r iznosi $r\sqrt{2}$, to je duž MO podudarna stranici kvadrata upisanog u dati krug.

Usled toga ako, polazeći od proizvoljne tačke A_1 na zadatoj kružnici O, otvorom MO šestara obilježimo uzastopno još tri tačke A_2, A_3 i A_4, ove četiri tačke (pošto podudarnim tetivama istog kruga pripadaju podudarni luci) dijele datu kružnicu na 4 jednaka dijela.

P r i m j e r 3. — Zadata je kružnica k. Samo upotrebom šestara konstruisati centar ove kružnice.

* Ovaj zadatak je postavio francuski vladar Napoleon I francuskim matematičarima, pošto je prethodno pročitao knjigu italijanskog matematičara Maskeronija o geometrijskim konstrukcijama koje se izvode samo šestarom.

Konstrukcija. — 1) Na datoj kružnici k izabire se proizvoljna tačka A (sl. 3), pa se oko tačke A opiše kružnica k proizvoljnog poluprečnika r, tako da se kružnice k i k' sijeku u tačkama B i C. — 2) Oko tačaka B i C opišu se kružnice l' i l'' poluprečnika $AB=AC$ koje se sijeku u tačkama A i M. — 3) Oko tačke M opiše se kružnica m poluprečnika AM koja siječe kružnicu k' u tačkama D i E. — 4) Oko tačaka D i E konstruišu se kružnice n' i n'' sa poluprečnicima $AD=AE$ koje se sijeku u tački S.

Dokazaćemo da je S centar date kružnice.

Dokaz. Pretpostavimo da tačka S nije centar kružnice k, nego da je to tačka O, tj. da je $OS \neq 0$. Zbog simetrije, tačke A, M, S i O su kolinearne. Iz konstrukcije slijedi da je $\triangle AES \backsim \triangle AEM$, jer su jednakokraki ($AE=ES$ i $AM=EM$ sa zajedničkim uglom α kod tačke A), pa imamo:

$$AS : AE = AE : AM, \text{ odakle slijedi: } AS = AE^2 : AM.$$

Iz sličnih razloga je $\triangle ACO \sim \triangle ACM$, pa je:

$$AO : AC = AC : AM, \text{ odakle slijedi: } AO = AC^2 : AM.$$

Po konstrukciji je $AC = AE$, pa iz toga proizalazi da je i

$$AS = AO, \text{ tj. da je } OS = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadaci

1. Dat je odsečak AB. Samo pomoću šestara treba da se konstruiše:

a) odsečak $AP = 3\,AB$; b) odsečak $AG = \frac{1}{3}AB$.

2. Samo pomoću šestara u datoj tački A treba podići normalu AP na datu pravu AB.

3. Data je prava koja prolazi kroz tačke A i B i tačka T koja ne leži na pravoj AB. Samo pomoću šestara treba konstruisati pravu koja prolazi kroz tačku T, a paralelna je sa datom pravom AB.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија