Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1999/2000 година

НЕЈЕДНАКОСТИ ИЗМЕЂУ БРОЈНИХ СРЕДИНА И ЊИХОВА ПРИМЈЕНА

Шефкет Арслангић, Природно-математички факултет, Сарајево

Први појмови о срединама потичу од питагорејаца. Они су вјероватно знали и за неједнакост

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b); a, b > 0 \tag{1}$$

али је ову неједнакост свакако доказао Еуклид.

Прво ћемо дефинисати основне средине за n позитивних бројева.

Дефиниција 1. Нека је $a = (a_1, \ldots, a_n)$ дата n-торка позитивних бројева. Тада је **хармонијска средина** $H_n(a)$ бројева $a_1, \ldots, a_n$ дефинисана изразом

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}};$$

геометријска средина $G_n(a)$ бројева $a_1, \ldots, a_n$ дефинисана изразом

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n};$$

аритметичка средина $A_n(a)$ бројева $a_1, \ldots, a_n$ дефинисана изразом

$$A_n(a) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n};$$

квадратна средина $K_n(a)$ бројева $a_1, \ldots, a_n$ дефинисана изразом

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Очигледно, неједнакост (1) представља неједнакост између аритметичке и геометријске средине двају позитивних бројева a и b. Сљедећа теорема даје поопштење те неједнакости за случај n позитивних бројева.

Теорема 1. (Неједнакост између аритметичке и геометријске средине) Нека је a дата n-торка позитивних бројева. Тада је

$$A_n(a) \geq G_n(a) \tag{2}$$

с једнакошћу ако и само ако је $a_1 = \cdots = a_n$.

Доказ 1. Користићемо математичку индукцију.

За $n = 2$ неједнакост (2) постаје (1), тј.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},$$

што је еквивалентно са $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$.

Посљедња неједнакост је очигледно тачна. У њој вриједи знак једнакости ако и само ако је $a_1 = a_2$. Претпоставимо да је неједнакост (2) тачна за неко $n = k \geq 2$, тј. да вриједи

$$A_k \geq G_k. \tag{3}$$

Тада је на основу (3):

$$A \equiv \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geq (a_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{k}} \equiv G. \tag{4}$$

Како је

$$\begin{aligned} A_k + A &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} = \\ &= \frac{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k-1}}{k} = 2A_{k+1}, \end{aligned}$$

водећи рачуна о (1) и (4), имамо

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2}(A_k + A) \geq (A_k A)^{\frac{1}{2}} \geq (G_k G)^{\frac{1}{2}} = (G_k^k G^k)^{\frac{1}{2k}} = \\ &= (G_k^k a_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}} = (G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$A_{k+1}^{2k} \geq G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1}, \text{ тј.}$$
$$A_{k+1} \geq G_{k+1}.$$

Овим је индуктивни доказ завршен.

Докажимо да једнакост у (2) наступа ако и само ако $a_1 = \cdots = a_n$.

Ако је $a_1 = \cdots = a_n$, тада имамо једнакост у (2). Претпоставимо сада да су бар два од бројева $a_1, \ldots, a_n$ различити, на примјер $a_1 \neq a_2$. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \\ &\geq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \cdot \ldots a_n^{\frac{1}{n}} > \\ &> (a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

јер је

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}, \text{ за } a_1 \neq a_2.$$

Овим је доказ завршен. Неједнакост између аритметичке и геометријске средине зваћемо кратко AG неједнакост.

Напомена 1. Да (2) вриједи изгледа да је први доказао још 1820. године велики француски математичар А. Л. Коши (21. 8. 1789. –23. 5. 1857.).

Неједнакост (2) игра веома важну улогу у математици и има велику примјену. Зато ћемо овдје дати још два доказа ове неједнакости.

Доказ 2. Нека је

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \text{ и } G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

аритметичка, односно, геометријска средина позитивних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Опет ћемо користити математичку индукцију по n да би доказали да је $A \geq G$.

За $n = 1$, тврдња је очигледно истинита. Претпоставимо да је тврдња истинита за $n-1$ и нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$. Можемо претпоставити, не умањујући општост, да је $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

Очигледно је

$$a_1 = \frac{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}{n} \leq A \leq \frac{a_n + a_n \cdots + a_n}{n} = a_n. \tag{5}$$

Посматрајмо $n-1$ бројева $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, (a_1 + a_n - A)$. Очигледно је $a_1 + a_n - A \geq 0$. По претпоставци индукције је

$$\left(\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (a_1 + a_n - A)}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}(a_1 + a_n - A).$$

Одавде слиједи

$$A^{n-1} \geq a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}(a_1 + a_n - A), \text{ тј.}$$
$$A^n \geq A \cdot a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}(a_1 + a_n - A).$$

Тврдимо да је

$$A \cdot a_2 a_3 \ldots a_{n-1}(a_1 + a_n - A) \geq a_1 a_2 \ldots a_n = G^n.$$

То је еквивалентно са $A(a_1 + a_n - A) \geq a_1 a_n$, тј. $(A - a_1)(a_n - A) \geq 0$, што је тачно због (5). Дакле, $A^n \geq G^n$, тј. $A \geq G$ (јер је $A, G \geq 0$).

Претпоставимо да $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нису сви међусобно једнаки. Тада је $a_1 < A < a_n$, па из горњих неједнакости одмах излази $A^n > G^n$, тј. $A > G$. Дакле, $A = G \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказ 3. Доказаћемо најпре неједнакост: Ако је $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, ($a_k > 0$ за $k = 1, 2, \ldots, n$), тада је

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n, \tag{6}$$

са једнакошћу ако и само ако је $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

За доказ ове тврдње користићемо математичку индукцију.

За $n = 1$ је $a_1 = a$ и неједнакост $a_1 \geq 1$ је испуњена као једнакост.

Претпоставимо да је тврдња тачна за неко $n \geq 1$. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ произвољни позитивни бројеви и $a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = 1$. Тада су могућа два случаја:

или су сви a_k једнаки јединици, тада им је сума једнака $n+1$ и неједнакост је доказана, или нису сви a_k једнаки јединици. У овом другом случају има бројева a_k који су већи и који су мањи од јединице.

Не умањујући општост, претпоставимо да је $a_n > 1$ и $a_{n+1} < 1$. Посматрајмо сада n бројева $a_1, a_2, \ldots, (a_n \cdot a_{n+1})$.

По претпоставци је производ тих бројева једнак јединици, те је према индуктивној претпоставци

$$a_1 + a_2 + \cdots + (a_n \cdot a_{n+1}) \geq n.$$

Додамо ли тој неједнакости (очигледну) једнакост $a_n + a_{n+1} - a_n \cdot a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)(1 - a_{n+1})$, добијамо

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_n - 1)(1 - a_{n+1}) > n + 1.$$

Према томе, из тачности дате тврдње за неко n, слиједи да је дата тврдња тачна и за $n+1$. Тиме ја дата тврдња (6) доказана. Очигледно важи једнакост у (6) ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 1$.

Сада ћемо доказати неједнакост

$$A \geq G.$$

Производ n позитивних бројева је

$$\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{G} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{G^n} = \frac{G^n}{n} = 1,$$

те је сагласно неједнакости (6):

$$\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \ldots + \frac{a_n}{G} \geq n, \text{ тј.}$$
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{G^n} \geq G \text{ или}$$
$$A \geq G,$$

што је и требало доказати. Знак једнакости вриједи ако и само ако је

$$\frac{a_1}{G} = \frac{a_2}{G} = \ldots = \frac{a_n}{G}, \text{ тј.}$$

ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Теорема 2. (Неједнакост између геометријске и хармонијске средине) Нека је a дата n-торка позитивних бројева. Тада је

$$G_n(a) \geq H_n(a), \tag{7}$$

с једнакошћу ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказ: Неједнакост AG за бројеве $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ даје

$$\left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}. \tag{8}$$

Овдје знак једнакости вриједи ако и само ако је $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \cdots = \frac{1}{a_n}$, тј. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Из(8) слиједи (7), тј. неједнакост између геометријске и хармонијске средине.

Теорема 3. (Неједнакост између аритметичке и квадратне средине) Нека је a дата n-торка позитивних бројева. Тада је

$$A_n(a) \leq K_n(a), \tag{9}$$

с једнакошћу ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказ: Ако се у идентитету

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n),$$

на десној страни умјесто $2a_ia_k$ стави $a_i^2 + a_k^2$ (што је веће или једнако од $2a_ia_k$ с једнакошћу ако и само ако је $a_i = a_k$) добијамо неједнакост

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2), \tag{10}$$

која вриједи за све реалне бројеве $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Како су сви $a_1, a_2, \cdots, a_n$ позитивни, из (10) слиједи

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2))^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

а из (11) се добија (9), с једнакошћу ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Напомена 2. Теореме (1), (2) и (3) дају

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a). \tag{12}$$

Неједнакости (7) и (9) називамо краће GH неједнакост и AK неједнакост респективно.

Напомена 3. Лако је доказати да вриједи

$$\begin{aligned} \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} &\leq H_n(a) \text{ као и} \\ \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} &\geq K_n(a), \text{ тј. коначно} \\ \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} &\leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a) \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}. \end{aligned}$$

Примјер 1. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c вриједи неједнакост

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geq 0.$$

Доказ 1: Након множења на левој страни неједнакости, она прелази у еквивалентну неједнакост:

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc.$$

Сада ћемо доказати да је ова неједнакост тачна.

На основу AG неједнакости имамо:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}; \quad \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}.$$

Након множења ових неједнакости, добијамо:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc,$$

па је и почетна неједнакост тачна.

Једнакост вриједи ако и само ако је $a = b = c$.

Доказ 2: Дијелећи дату неједнакост са $abc > 0$, добијамо неједнакост:

$$\frac{a+b-2c}{c} + \frac{b+c-2a}{a} + \frac{a+c-2b}{b} \geq 0, \text{ тј.}$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 2 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 2 \geq 0 \text{ или}$$
$$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 6.$$

Због AG неједнакости добијамо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}}, \text{ тј. } \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2,$$

те слично

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2 \text{ и } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Након сабирања три последње неједнакости, добијамо неједнакост еквивалентну са почетном. Једнакост вриједи ако и само ако је $a = b = c$.

Доказ 3: Након множења дата неједнакост постаје

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 \geq 6abc.$$

Докажимо да је ова неједнакост тачна.

На основу AG неједнакости, имамо

$$\frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2}{6} \geq \sqrt[6]{a^2b \cdot ab^2 \cdot b^2c \cdot bc^2 \cdot a^2c \cdot ac^2},$$

односно,

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 \geq 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}, \text{ тј.}$$
$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 \geq 6abc,$$

што значи да је еквивалентна неједнакост тачна, па је почетна неједнакост тачна.

Вриједи једнакост ако и само ако је $a^2b = ab^2 = b^2c = bc^2 = a^2c = ac^2$, тј. ако је $a = b = c$.

Доказ 4: Дата неједнакост је очигледно еквивалентна неједнакости

$$ab(a+b-2c) + 3abc + bc(b+c-2a) + 3abc + ca(c+a-2b) + 3abc \geq 9abc,$$

односно,

$$\begin{aligned} ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c) &\geq 9abc, \\ \text{тј. } (a+b+c)(ab+bc+ca) &\geq 9abc, \\ \text{или } (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &\geq 9, \\ \text{тј. } \frac{a+b+c}{3} &\geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \end{aligned}$$

а ово је неједнакост AH која је тачна. Дакле, дата неједнакост је тачна, са једнакошћу ако и само ако је $a=b=c$.

Примјер 2. Доказати да за $a,b>0$ и $a+b\geq 1$ вриједи неједнакост

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}.$$

Доказ: На основу AK неједнакости, слиједи

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \frac{a^2+b^2}{2} \text{ тј. } \frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2.$$

Такође, због исте AK неједнакости имамо

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \quad \text{тј.} \quad \frac{a^2+b^2}{2} &\geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ \text{или } \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4. \end{aligned}$$

Сада добијемо да је

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4, \text{ тј. } a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4,$$

а одавде због $a+b\geq 1$:

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8},$$

што је и требало доказати. Вриједи једнакост ако и само ако је $a=b=\frac{1}{2}$.

Примјер 3. Ако су a,b,c позитивни реални бројеви, доказати да вриједи неједнакост:

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \leq \frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Доказ: *Да бисмо доказали десну неједнакост примјенимо најприје* HA, а потом AG неједнакост:

$$\begin{aligned} \frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} &= \frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}+\frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}}+\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}} \leq \\ &\leq \frac{b^2+ab}{4}+\frac{c^2+bc}{4}+\frac{a^2+ac}{4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{1}{4}(ab+ac+bc) \leq \\ &\leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{1}{4}(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2}) = \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \end{aligned}$$

Овим је десна страна неједнакости доказана. За доказивање лијеве стране примјенићемо најприје AG неједнакост:

$$\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \geq \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}}.$$

Морамо, дакле, још показати да је:

$$\frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}} \geq \frac{9abc}{2(a+b+c)},$$

$$\text{тј. } 2(a+b+c) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

Но, то је AG неједнакост за бројеве $a+b, b+c, a+c$. Тиме је и лијева страна дате неједнакости доказана. Вриједи једнакост ако и само ако је $a=b=c$.

Примјер 4. Доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}; n \in N.$$

Доказ: На основу AK неједнакости, слиједи

$$\frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}{n} < \sqrt{\frac{(\frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2n})^2}{n}},$$

или

$$(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n})^2 < n((\frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2n})^2).$$

(Овдје у AK неједнакости вриједи строга неједнакост $<$, јер је $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \cdots > \frac{1}{2n}$).

Након сабирања очигледних неједнакости

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \ldots, \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{(2n-1)2n},$$

добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} &< \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Сада добијамо

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2 < n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

односно,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

што значи да је почетна неједнакост тачна.

Задаци

1. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $a+b+c \leq 3$. Доказати да вриједи неједнакост
$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Доказати да за реалне позитивне бројеве a, b, c вриједи неједнакост
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Доказати да за реалне бројеве a и b, $(0 \leq a, b \leq 1)$ вриједи неједнакост
$$1+a+b \geq 3\sqrt{ab}.$$

4. Одредити $\min P(x,y)$ ако је
$$P(x,y)=1999+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2; \quad (x,y\in R).$$

5. Доказати да за све $a, b > 0$ који задовољавају услов $a+b=1$, вриједи неједнакост
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

6. Доказати да за позитивне бројеве x, y, z вриједи неједнакост
$$\sqrt{2}(xy+yz) \leq x^2+y^2+z^2.$$

7. Доказати да за све реалне бројеве a, b, c вриједи неједнакост
$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64,$$
уз услов $a+b+c=1$.

8. Доказати да за све позитивне реалне бројеве вриједи неједнакост
$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

9. Доказати да за реалне позитивне бројеве a, b, c вриједи неједнакост

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \geq 4abc - 1.$$

10. Доказати да за позитивне бројеве x и y вриједи неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geq \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}.$$

11. Показати да за позитивне реалне бројеве a, x, y важи неједнакост

$$\frac{xy}{ax+y} \leq \frac{x+y}{(1+\sqrt{a})^2}.$$

12. Доказати да вриједи неједнакост

$$\sqrt[1999]{12} + 3\sqrt[1999]{3} + \sqrt[1999]{24} > 5\sqrt[1999]{6}.$$

13. Одредити минималну вредност суме $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ ако вриједи $x, y, z \in R^+$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

14. Ако је $a > b > c > 0$ и $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$, доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{4}{c^2} + \frac{1}{(a-b)b} + \frac{1}{(b-c)c} \geq \frac{4}{3}.$$

15. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c вриједи неједнакост:

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (\sqrt[3]{abc} + 1)^3.$$

16. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c вриједи неједнакост:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}.$$

17. Доказати неједнакост

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right),$$

гдје су a, b, c реални бројеви.

18. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c вриједи неједнакост

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

19. За реалне позитивне бројеве a, b, c, d вриједе неједнакости $a^2 + b^2 \leq 1$ и $c^2 + d^2 \leq 1$. Доказати да вриједи неједнакост

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leq 2\sqrt{2}.$$

Када вриједи једнакост?

20. Доказати да за реалне бројеве $x, y, z > 0$ важи неједнакост:

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > 2.$$

21. Доказати да за реалне бројеве $a, b, c > 0$ вриједи неједнакост

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

22. Доказати да за реалне бројеве x и y вриједи неједнакост

$$x^4 + y^4 + (x^2+1)(y^2+1) \geq x^3(1+y) + y^3(1+x) + x + y.$$

23. Доказати да вриједи неједнакост

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}),$$

под условом да је $xyz = 1$, те $x, y, z > 0$.

24. Нека су a, b, c реални позитивни бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

25. Који од бројева $\log_{1999} 1998$ или $\log_{2000} 1999$ је већи?

26. Одредити максималну вриједност функције

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x^n, \quad n \in N.$$

27. Ако су a и b позитивни реални бројеви, доказати да вриједи неједнакост

$$2(a^{2b}b^{2b})^{\frac{1}{(a+b)}} \leq a^2 + b^2.$$

28. Ако су a, b, c, d позитивни реални бројеви, доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

29. Између свих правоуглих троуглова чији је обим једнак a, одредити онај чија је површина највећа.

30. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

31. Доказати да у троуглу вриједи неједнакост

$$s \geq 3\sqrt{3}r,$$

гдје је s полуобим троугла, а r полупречник уписаног круга у троуглу.

32. Доказати да у троуглу вриједи неједнакост

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).$$

33. Доказати да у троуглу вриједи неједнакост

$$\sqrt{s}<\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}\leq\sqrt{3s}.$$

34. Доказати да за све $0\leq x<\frac{\pi}{3}$ вриједи неједнакост

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}+x)}+\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-x)}\geq\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

35. Доказати да у троуглу вриједи неједнакост

$$\frac{s_\alpha}{a}+\frac{s_\beta}{b}+\frac{s_\gamma}{c}\leq\frac{s}{2r},$$

где су $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ дужине симетрала углова троугла, s полуобим, r полупречник уписане кружнице троугла.

36. Доказати да за углове троугла вриједи неједнакост

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}.$$

37. За конвексни четвороугао, који је истовремено и тетивни и тангентни (може му се и описати и уписати кружница) вриједи неједнакост:

$$abc+abd+acd+bcd\leq 2\sqrt{P}(P+2R^2),$$

где су a,b,c,d дужине његових страница, R полупречник описане кружнице, а P његова површина. Доказати!

38. Ако су α,β,γ углови истог троугла, тада важи неједнакост

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\geq\frac{8}{3+2\cos\gamma}.$$

39. Одредити највећу вриједност константе k тако да вриједи неједнакост:

$$\frac{kabc}{a+b+c}\leq(a+b)^2+(a+b+4c)^2,$$

за све $a,b,c>0$.

40. Доказати да вриједи неједнакост

$$2\sqrt{bc+ca+ab}\leq\sqrt{3}\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

41. Доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}{abc}},$$

гдје су $a, b, c > 0$.

42. Доказати да у троуглу вриједи неједнакост

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35}\left(\frac{abc}{s} + s^2\right).$$

43. Доказати да у правоуглом троуглу вриједи неједнакост

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2}.$$

Литература

1. Š. Arslanagić, O primjeni poznatih nejednakosti, Triangle, Sarajevo, 1/1997, 11-24.
2. Š. Arslanagić, Neke interesantne (i neočekivane) primjene nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine, Naša škola, Sarajevo, 3/1998, 33-34.
3. O. Botemma and other, Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, Netherlands, 1969.
4. A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1977.
5. W. Janous, Nejednakosti u vezi sa trouglom, Triangle, Sarajevo, 4/1997, 2. 223-230.
6. D.S. Mitrinović, Analitic Inequalities, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1970.
7. M. E. Kuczma, Problems (144 Problems of the Austrian-Polish Mathematics-Competion, 1978-1993), The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, USA, 1993.
8. J. E. Pečarić, Nejednakosti, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, Mala matematička biblioteka br. 6. , Element, 1996.