Сојузен натпревар 1978

I година

1. Определи ја вредноста на изразот

$$S=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

ако за реалните броеви x, y, z важи $xyz=1$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}\\&=\frac{z}{z+xz+xyz}+\frac{xz}{xz+xyz+xyz^2}+\frac{1}{1+z+zx}\\&=\frac{z}{1+z+xz}+\frac{xz}{1+z+xz}+\frac{1}{1+z+zx}=1,\end{aligned}$$

доколку изразот S е определен.

2. Определи ги сите природни броеви кои се 33 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0}$, каде $a_i\in\{0,1,2,...,9\}$ за $i=0,1,$ $...,n-1$. Условот

$$a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+10a_1+a_0=33(a_{n-1}+...+a_1+a_0)$$

може да се запише во обликот

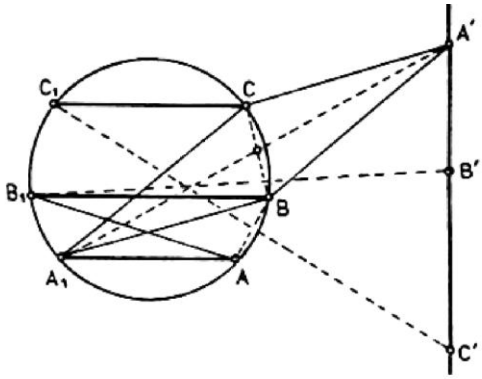
$$a_{n-1}(10^{n-1}-33)+...+a_2(10^2-33)=23a_1+32a_0\,.$$

Левата страна во последното равенство не е помала од $10^{n-1}-33$, а десната не е поголема од 495, па затоа ова равенство е можно единствено за $n\le 3$. Лесно се проверува дека не постојат едноцифрени и двоцифрени броеви кои го задоволуваат дадениот услов. За $n=3$ добиваме $100x+10y+z=33(x+y+z)$. Тоа значи дека бараниот број мора да е делив со 3. Но, тоа значи дека десната страна е делива со 9, па затоа бројот е делив со 9. Значи, $9\,|\,x+y+z$, што е можно само ако $x+y+z\in\{9,18,27\}$. Со непосредна проверка се покажува дека само за $x+y+z=18$ се добива бројот 594 кој ги задоволува условите на задачата.

3. Нека AA_1, BB_1, CC_1 се паралелни тетиви на некоја кружница. Точките $A', B',$ C' се редоследно симетрични на точките A_1, B_1, C_1 во однос на средините на отсечките BA, CA, AB. Докажи дека точките A', B', C' се колинеарни.

Решение. Според претпоставките дијагоналите на четириаголникот $A_1BA'C$ се половат, па затоа овој четириаголник е паралелограм, т.е. $CA'\,||\,A_1B$ и $CA'=A_1B$, цртеж долу десно.

Слично, $CB' \| B_1A$ и $CB' = B_1A$. Оттука следува дека триаголникот $A'B'C$ е рамнокрак и $A'B' \perp A_1A$. На сличен начин се докажува дека $B'C' \perp C_1C$. Но, $AA_1 \| CC_1$, па од претходно изнесеното следува дека точките A', B', C' се колинеарни.



4. Табела 9×10 прво е покриена со домина 2×1, а потоа доминатa се измешани. Докажи дека табелата не може повторно да се покрие со тие домина така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање ќе биде во вертикална положба.

Решение. Нека претпоставиме дека табелата е поставена така што има 10 редови и 9 колони. Вертикалните домина на првата колона покриваат парен број полиња, па затоа и бројот на полињата кои ги покриваат хоризонталните домина е парен. Овие домина значи покриваат парен број полиња на втората колона. Бидејќи вертикалните домина во оваа колона исто така покриваат парен број полиња, остануваат парен број полиња на втората колона кои се покриени од домина кои „преминуваат“ и во третата колона. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека вкупниот број хоризонтални домина е парен. Но, бројот на доминатa е 45, па значи дека вкупниот број вертикални домина е непарен.

Меѓутоа, истиот заклучок важи и за второто покривање на табелата, па затоа не може да се исполнети условите на здачата.

II година

1. Дали постојат реални броеви a,b,c,d такви што:

1) равенката $ax^2+bdx+c=0$ има различни реални решенија x_1 и x_2 .

2) равенката $bx^2+cdx+a=0$ има различни реални решенија x_2 и x_3.

1) равенката $cx^2+adx+b=0$ има различни реални решенија x_3 и x_1.

Решение. Ако такви броеви a,b,c,d постојат, тогаш $abc\neq0$. Од Виетовите правила следува $x_1x_2=\frac{c}{a}, x_2x_3=\frac{a}{b}, x_3x_1=\frac{b}{c}$, па затоа $x_1^2x_2^2x_3^2=1$, т.е. $x_1x_2x_3=\varepsilon$, каде $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=-1$. Понатаму, $x_3=\varepsilon\frac{a}{c}, x_1=\varepsilon\frac{b}{a}, x_2=\varepsilon\frac{c}{b}$, па со замена во дадените равенки добиваме

$$b^2(1+d\varepsilon)=-ac, \quad c^2(1+d\varepsilon)=-ba, \quad a^2(1+d\varepsilon)=-bc .$$

Бидејќи $abc\neq0$, од последните релации следува дека $1+d\varepsilon\neq0$, па со делење на соодветните релации добиваме

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{c}{b},\ \frac{c^2}{a^2}=\frac{a}{c},\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{b}{a},$$

од каде следува $a^3=b^3=c^3$, т.е. $a=b=c$. Но, тоа значи дека сите три равенки се совпаѓаат, што противречи на претпоставката $x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_1$. Според тоа, не постојат броеви a,b,c,d кои го задоволуваат условот на задачата.

2. Нека S е подмножество од множеството реални броеви такво што:
а) $\mathbb{Z}\subset S$,
б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in S$,
в) од $x,y\in S$ следува $x+y\in S,\ xy\in S$.
Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\in S$.

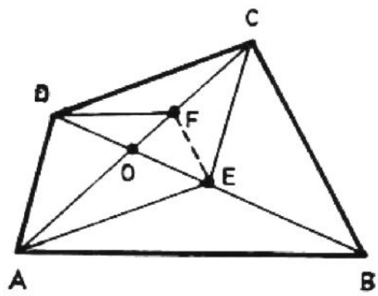
Решение. Да означиме $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогаш

$$a^2=5+2\sqrt{6},$$
$$(a^2-5)^2=24,$$
$$a^4-10a^2+1=0,$$
$$a(10a-a^3)=1,$$
$$\frac{1}{a}=10a-a^3.$$

Сега, $10\in S, a\in S$, па затоа $10a\in S$ и како $-1\in S, a\in S$, добиваме $-a^3\in S$. Конечно, $\frac{1}{a}=10a-a^3\in S$.

3. Даден е четириаголник $ABCD$. Нека E е точка на правата DB таква што $AE\parallel DC$, а F е точка на правата AC таква што $DF\parallel AB$. Докажи дека $EF\parallel BC$.

Решение. Со O да го означиме пресекот на правите AC и BD, цртеж десно (тој може да биде и надвор од четириаголникот $ABCD$). Од сличноста на триаголниците AOB и FOD добиваме $AO:OB=FO:OD$, а од сличноста на триаголниците AOE и COD добиваме $AO:OE=CO:OD$. Со делење на овие релации се добива $OE:OB=FO:CO$, а оттука следува сличноста на триаголниците FOE и COB, па затоа $EF\parallel BC$.



4. Нека $A_1,A_2,...,A_n$ се точки од една права такви што најголемото од растојанијата $A_iA_j\ (i\neq j)$ е еднакво на 1, а најмалото d. Докажи дека $d<\frac{2}{\sqrt{n-1}}$.

Решение. Околу секоја од дадените точки да опишеме круг со радиус $\frac{d}{2}$. Бидејќи најмалото растојание A_iA_j $(i \neq j)$ е еднакво на d овие кругови немаат заеднички внатрешни точки. Понатаму, да опишеме круг со радиус $1+\frac{d}{2}$ и центар во која било од дадените точки. Бидејќи на него концентричниот круг со радиус 1 ги содржи (на работ или во внатрешноста) сите дадени точки, заклучуваме дека поголемиот круг ги покрива сите претходно конструирани помали кругови. Затоа неговата плоштина е поголема од збирот на плоштините на сите мали кругови, т.е. $\pi(1+\frac{d}{2})^2 > n\pi(\frac{d}{2})^2$, од каде по средувањето се добива бараното неравенство.

III година

1. Определи ги сите природни броеви n за кои постои полином $P_n(x)$ од $n-$ти степен со целобројни коефициенти, таков што во n различни целобројни вредности е еднаков на n, а во нулата е еднаков на нула.

Решение. Полиномот $Q_n(x) = n - P_n(x)$ исто така е од $n-$ти степен, но таков што во n различни целобројни точки е еднаков на нула, а во нулата е еднаков на n. Според тоа,

$$Q_n(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n),$$

каде $x_1, x_2, ..., x_n$ се нулите на полиномот $Q_n(x)$. Од Виетовите формули следува

$$n = Q_n(0) = (-1)^n a x_1 x_2 ... x_n \qquad (1)$$

и како меѓу корените $x_1, x_2, ..., x_n$ најмногу два се еднакви на 1 или -1 од равенството (1) следува

$$|(-1)^n a x_1 x_2 ... x_n| \geq 2^{n-2}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $n \geq 2^{n-2}$. Последното неравенство е исполнето за $n \leq 4$ (со индукција може да се докаже дека за $n > 4$ важи $2^{n-2} > n$). Значи, за $n = 0,1,2,3,4$ може да постојат бараните полиноми. На пример, тоа се полиномите

$$Q_0(x) = 0 = P_0(x),$$
$$Q_1(x) = x+1,\ P_1(x) = -x$$
$$Q_2(x) = (x-1)(x-2),\ P_2(x) = 3x - x^2$$
$$Q_3(x) = (x-1)(x+1)(x-3),\ P_3(x) = x + 3x^2 - x^3$$
$$Q_4(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2),\ P_4(x) = 5x^2 - x^4.$$

2. Докажи дека целиот број $r > 2$ е сложен ако и само ако е точно барем едно од следниве две тврдења:

а) $r = 2^s$ за некој $s \in \{2,3,...\}$, б) $r=\frac{u}{2}(2v-u+1)$ за некои $u,v\in\{3,4,...\},(u\le v)$.

Решение. Да претпоставиме дека $r>2$ е сложен број. Ако единствен негов прост множител е 2, тогаш важи тврдењето а). Нека претпоставиме дека тоа не е случај. Ќе докажеме дека тогаш важи тврдењето б).

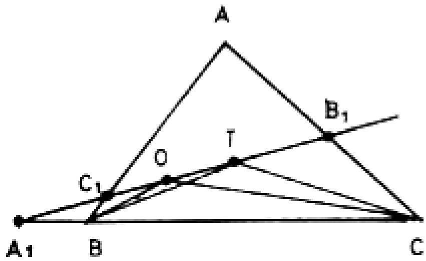
Нека $r=ab$, каде $a>1,b>1$ и a е непарен број. Тогаш важи или $b\le\frac{a-1}{2}$ или $b>\frac{a-1}{2}$. Ако $b\le\frac{a-1}{2}$, земаме $u=2b,v=b+\frac{a-1}{2}$. Тогаш $u\ge4,v\ge3,\ v-u=\frac{a-1}{2}-b\ge0$ и $\frac{u}{2}(2v-u+1)=ab=r$. Ако $b>\frac{a-1}{2}$, земаме $u=a,v=b+\frac{a-1}{2}$. Тогаш $u\ge3,$ $v\ge3,\ v-u=b-\frac{a-1}{2}-1\ge0$ ($b-\frac{a-1}{2}$ е цел број поголем од 0) и $\frac{u}{2}(2v-u+1)=ab=r$.

Обратно, ако важи а) тогаш очигледно r е сложен број. Затоа да претпоставиме дека важи тврдењето б), т.е. дека за некои $u,v\in\{3,4,...\},(u\le v)$ важи $r=\frac{u}{2}(2v-u+1)$. Ако u е парен број, $u=2q$, тогаш $r=q(2v-2q+1)$, при што $q>1$ и $2v-2q+1>1$ (бидејќи $v>2q$), па затоа r е сложен број. Ако u е непарен број, $u=2q+1$, тогаш $r=(2q+1)(v-q)$, при што $2q+1>1$ и $v-q>1$ (бидејќи $v\ge2q+1$), па повторно r е сложен број. Со тоа е докажано тврдењето на задачата.

3. Нека T е тежиште и O е произволна точка во триаголникот ABC. Ако A_1,B_1,C_1 се пресечните точки на правата OT соодветно со правите BC,CA,AB, докажи дека

$$OA_1\cdot OB_1\cdot OC_1\le TA_1\cdot TB_1\cdot TC_1.$$

Решение. Триаголниците OBC и TBC имаат заедничка основа BC, а висините им се пропорционални на отсечките OA_1 и TA_1, цртеж десно. Затоа важи



$$\frac{OA_1}{TA_1}=\frac{P_{OBC}}{P_{TBC}}=3\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}.$$

Користејќи слични изрази за $\frac{OB_1}{TB_1}$ и $\frac{OC_1}{TC_1}$, и неравенството меѓу средините добиваме

$$\frac{OA_1}{TA_1}\cdot\frac{OB_1}{TB_1}\cdot\frac{OC_1}{TC_1}=27\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}\cdot\frac{P_{OCA}}{P_{ABC}}\cdot\frac{P_{OAB}}{P_{ABC}}\le(\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}+\frac{P_{OCA}}{P_{ABC}}+\frac{P_{OAB}}{P_{ABC}})^3=1.$$

4. Во рамнината се дадени n точки $A_1,A_2,...,A_n$. Ако $A_iA_j\ge1$, за секои $i,j\in\{1,2,...,n\}$, каде $i\ne j$, докажи дека бројот на отсечките A_iA_j кои се подолги од 1 не е поголем од $3n$.

Решение. Нека A произволна од дадените точки. На кругот со центар во A и радиус 1 може да му припаѓаат најмногу 6 од дадените точки, бидејќи нивното меѓусебно растојание не може да е помало од 1. Значи, секоја од дадените точки може да биде крајна на најмногу 6 отсечки со должина 1. Бидејќи има n точки, а на овој начин секоја отсечка ја сметаме два пати, добиваме дека вкупниот број отсечки со должина е не е поголем од $\frac{6n}{2}=3n$.

IV година

1. Нека n е природен број. Со p_k да го означиме бројот на ненегативните целобројни решенија на равенката $kx+(k+1)y=n-k+1$. Определи го збирот $p_1+p_2+...+p_{n+1}$.

Решение. Дадената равенка можеме да ја запишеме во обликот

$$k(x+y+1)+y=n+1,$$

односно $ka+b=n+1$, при што $0\leq b=y<x+y+1=a$. Обратно, на секое решение на равенката $ka+b=n+1$, при дадените услови, соодветствува точно едно решение на почетната равенка. Значи, треба да го определиме вкупниот број тројки (k,a,b), каде a и b се ненегативни, а k е позитивен цел број, $k\leq n+1$, за кои важи $ka+b=n+1$ и $b<a$. Бидејќи на секој $k\in\{1,2,...,n+1\}$ му соодветствува едно пртставување на бројот $n+1$ во наведениот облик (теорема за делење со остаток), добиваме дека бараниот збир е еднаков на $n+1$.

2. Нека $a+(n-1)d, n=1,2,3,...$ е аритметичка низа со разлика $d>0$. Докажи дека $\frac{a}{d}$ е рационален број ако и само ако од дадената низа може да се оддели геометриска подниза.

Решение. Нека претпоставиме дека дадената аритметичка низа содржи геометриска подниза. Нека $a+kd, a+ld$ и $a+md$ се било кои три последователни членови на геометриската подниза. Тогаш важи $(a+ld)^2=(a+kd)(a+md)$, па како $d\neq 0$ следува $a(2l-k-m)=d(km-l^2)$. Ако $2l-k-m=0$, ќе следува

$$km-l^2=km-(\tfrac{k+m}{2})^2=-(\tfrac{k+m}{2})^2<0,$$

па претходното равенство не може да важи. Затоа $2l-k-m\neq 0$, па добиваме

$$\frac{a}{d}=\frac{km-l^2}{2l-k-m},$$

што значи дека $\frac{a}{d}$ е рационален број.

Нека претпоставиме дека $\frac{a}{d}=\frac{p}{q}$ е рационален број ($p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$). Тогаш

$$a_n = a + (n-1)d = \frac{p}{q}d + (n-1)d = \frac{p+(n-1)q}{q}d .$$

Ќе определиме природен број x таков што количникот

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} = \frac{p+(n+x-1)q}{p+(n-1)q} = \alpha$$

е број кој не зависи од n. Мора да е $x = \frac{(\alpha-1)(p+qn-q)}{q}$, т.е. $q \mid \alpha - 1$. Ако ставиме $\alpha = q+1$, добиваме $x = p - q + nq$ и важи

$$a_{p-q+n(q+1)} = (q+1)a_n ,$$

каде претпоставуваме дека n е доволно голем така што $p-q+n(q+1)$ е природен број. Сега да избереме растечка низа природни броеви (n_k) на следниов начин: бројот n_1 се избира произволно, така што $p-q+n_1(q+1)$ е природен број и $a_{n_1} \neq 0$; ако броевите $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ се избрани, избираме $n_k = p - q + n_{k-1}(q+1)$. Поднизата (a_{n_k}) на дадената низа ќе биде геометриска. Навистина, важи

$$\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k-1}}} = \frac{a_{p-q+n_{k-1}(q+1)}}{a_{n_{k-1}}} = \frac{(q+1)a_{n_{k-1}}}{a_{n_{k-1}}} = q+1, \text{ за } k = 2,3,... .$$

3. Нека множеството $P \subset \mathbb{N}$ е такво што

(1) $a \in P, b \in P \;\Rightarrow\; a+b \in P$,

(2) $(\forall q \in \mathbb{N})\, q > 1 \Rightarrow (\exists c \in P)\, c \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$.

Докажи дека множеството $\mathbb{N} \setminus P$ е конечно.

Решение. Прво да забележиме дека од својството (1) следува дека важи

$$a \in P, k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; ka \in P. \qquad (3)$$

Ќе докажеме дека P содржи два заемно прости броја. Од (2) следува дека P е непразно множество. Нека $a \in P$ и нека $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ е неговото канонично разложување. Од (2) следува дека за секој $j = 1, 2, ..., r$ постои $c_j \in P$ таков што p_j не е делител на c_j. Нека

$$b = \frac{ac_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{ac_2}{p_2^{\alpha_2}} + ... + \frac{ac_r}{p_r^{\alpha_r}} .$$

Овој број е природен и не е делив со ниту еден од простите множители p_j на бројот a (во дадениот збир сите собирци освен еден се деливи со p_j), па затоа a и b се заемно прости. Од (3) и $c_j \in P$ следува $\frac{ac_j}{p_j^{\alpha_j}} \in P$, па од (1) следува дека $b \in P$. Со тоа докажавме дека P содржи два заемно прости броја.

Сега ќе го докажеме тврдењето на задачата, со тоа што ќе докажеме дека множеството P ги содржи сите природни броеви n за кои $n > ab$. Навистина, ако n

е таков број, тогаш заради $(a,b)=1$, еден од природните броеви $n-a, n-2a, ...,$ $n-ba$ е делив со b, па постојат природни броеви k и l такви што $n=ka+lb$. Сега, од (3) и (1) следува дека $n \in P$, со што тврдењето на задачата е докажано.

4. Нека $a \geq 3$ и нека $P_n(x)$ е полином од $n-$ти степен со реални коефициенти. Докажи дека

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)| \geq 1.$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=0$, полиномот $P_0(x)$ е константа: $P_0(x)=c$. Ако тврдењето не важи, треба да е $|1-c|<1$ и $|a-c|<1$, од каде ќе следува $|a-1| \leq |a-c|+|c-1|<1+1=2$, што противречи на претпоставката дека $a \geq 3$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за сите природни броеви кои се помали или еднакви на $n-1$. Нека $P_n(x)$ е произволен полином од $n-$ти степен. Степенот на полиномот $Q(x)=\frac{P_n(x+1)-P_n(x)}{a-1}$ е помал од n, па од претпоставката следува дека за него тврдењето важи. За секој $i=0,1,2,...,n$ имаме

$$\begin{aligned}
|a^i - Q(i)| &= \frac{|a^{i+1}-a^i-P_n(i+1)+P_n(i)|}{a-1} \\
&\leq \frac{|a^{i+1}-P_n(i+1)|}{a-1} + \frac{|a^i-P_n(i)|}{a-1} \\
&\leq \frac{2}{a-1} \max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)| \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)|.
\end{aligned}$$

Бидејќи за некој i важи $|a^i - Q(i)| \geq 1$, добиваме дека

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)| \geq 1,$$

што и требаче да се докаже.

Мала олимпијада

1. Определи ги сите цели броеви x, y, z такви што

$$x^2(x^2+y) = y^{z+1}$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(2x^2+y)^2 = y^2 + 4y^{z+1}.$$

Лесно се проверува дека таа нема решенија за кои $z \leq -1$. За $z=0$ десната страна е еднаква на $y^2+4y=(y+2)^2-4$, па може да е квадрат на цел број само за $y=0$

и $y=-4$. Првиот случај дава решеение $(0,0,0)$, а во вториот случај немаме решение.

Да претпоставиме дека $z\geq 1$. Дадената равенка да ја запишеме во видот

$$(2x^2+y)^2=y^2(1+4y^{z-1}),$$

од каде следува дека $1+4y^{z-1}$ мора да е квадрат на цел број. Тој број мора да е непарен, па затоа $1+4y^{z-1}=(1+2v)^2, (v\geq 0)$, од каде добиваме $y^{z-1}=v(v+1)$. Последното е можно за $v=0$, што дава решение $x=0, y=0$, како и за $z=2$ и $y=v(v+1)$. Со замена во равенката добиваме $x^2=v^2(v+1)$, па затоа мора да е $v=t^2-1,\ t\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$, (вредностите $-1,0,1$ ги исклучивме бидејќи повторно го добиваме тривијалното решение $x=0$). Со непосредна проверка се добива дека $x=t^3-t, y=t^4-t^2$ за $z=2$ се решенија на дадената равенка.

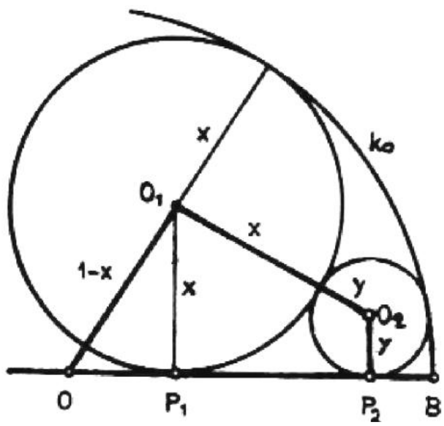
Според тоа, сите тројки (x,y,z) цели броеви кои се решенија на дадената равенка се $(0,0,z), z\geq 0$ и $(t^3-t,t^4-t^2,2),\ t\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$.

2. Нека k_0 е единечна полукружница над дијаметарот AB, а k_1 е кружница со радиус $r_1=\frac{1}{2}$ која ги допира k_0 и AB. Кружницата k_{n+1} со радиус r_{n+1} ги допира k_n, k_0 и AB. Докажи:

а) За секој $n\in\{2,3,...\}$ важи $\frac{1}{r_{n+1}}+\frac{1}{r_{n-1}}=\frac{6}{r_n}-4$.

б) $\frac{1}{r_n}$ е или квадрат на парен природен број или двократен квадрат на непарен природен број.

Решение. Нека O е центар на дадената единична полукружница k_0, O_1 и O_2 се центри на две кружници кои ја допираат полукружницата k_0, ја допираат отсечката AB во точките P_1 и P_2 и се допираат меѓу себе, а радиусите им се x и y, цртеж десно. Тогаш



$$P_1P_2^2=(x+y)^2-(x-y)^2=4xy,$$

$$OP_1^2=OO_1^2-O_1P_1^2=1-2x,$$

$$OP_2^2=OO_2^2-O_2P_2^2=1-2y,$$

па е $2\sqrt{xy}=P_1P_2=OP_2-OP_1=\sqrt{1-2y}-\sqrt{1-2x}$. Оттука, по двократно квадрирање и средување , добиваме

$$x^2+y^2+4x^2y^2-6xy+4x^2y+4xy^2=0,$$

или, ако ставиме $\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b$, добиваме

$$a^2+b^2+4-6ab+4a+4b=0. \qquad (1)$$

Ако $a=\frac{1}{r_n}$, тогаш добиената квадратна равенка по b има решенија $\frac{1}{r_{n+1}}$ и $\frac{1}{r_{n-1}}$, па од Виетовите формули следува

$$\frac{1}{r_{n+1}}+\frac{1}{r_{n-1}}=\frac{6}{r_n}-4, \text{ за } n=2,3,..., \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r_{n+1}}\cdot\frac{1}{r_{n-1}}=(\frac{1}{r_n}+2)^2, \text{ за } n=2,3,.... \qquad (2')$$

Од релацијата (1) се добива $r_2=\frac{1}{4}$. Оттука и од (2) и (2') со индукција следува дека $\frac{1}{r_{2k}}$ е квадрат на парен природен број, а $\frac{1}{r_{2k+1}}$ е двократен квадрат на непарен природен број.

3. Нека $\mathbb{F}$ е фамилија подмножества на множество од n елементи, таква што ниту еден нејзин член не е подмножество на друг нејзин член. Докажи дека фамилијата $\mathbb{F}$ може да има најмногу $\binom{n}{[n/2]}$ елементи.

Решение. Нека $\mathbb{F}$ е фамилија со опишаните својства која има најголем можен број членови. Потоа нека k е најмалиот број елементи кои ги има некој член на фамилијата $\mathbb{F}$ и l е бројот на членовите кои имаат по k елементи. Ќе докажеме дека $k\geq\frac{n-1}{2}$.

Нека претпоставиме дека $k<\frac{n-1}{2}$. Со $\mathbb{F}_1$ да ја означиме фамилијата подмножества на даденото множество која ја добиваме кога од фамилијата $\mathbb{F}$ ќе ги отстраниме сите l членови кои имаат по k елементи, а на нивно место ќе ги ставиме сите нивни надмножества кои имаат по $k+1$ елемент (ниту едно од нив не е член на фамилијата $\mathbb{F}$). На овој начин сме добиле барем $\frac{l(n-k)}{k+1}$ нови членови, бидејќи секој исфрлен член има $n-k$ надмножества, а секој додаден се појавува најмногу $k+1$ пати. Од $k<\frac{n-1}{2}$ следува $\frac{n-k}{k+1}l>l$, па следува дека фамилијата $\mathbb{F}_1$ има повеќе членови од фамилијата $\mathbb{F}$. Лесно се проверува дека фамилијата $\mathbb{F}_1$ го има својството ниту еден нејзин член да не е подмножество на некој друг нејзин член. Последното противречи на претпоставката за максималноста на фамилијата $\mathbb{F}$. Значи, најмалиот број елементи на некој член на фамилијата $\mathbb{F}$ е $k\geq\frac{n-1}{2}$.

На сличен начин се докажува дека најголемиот број елементи на некој член на фамилијата $\mathbb{F}$ е помал или еднаков на $\frac{n+1}{2}$. Според тоа, фамилијата $\mathbb{F}$ може да има само подмножества на n елементно множество кои имаат $\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}$ елементи.

Сега да го разгледаме случајот на парен и непарен n. Ако $n = 2m$, од претходно изнесеното следува дека $\mathbb{F}$ може да содржи само членови со $m = \frac{n}{2}$ елементи. Од друга страна, фамилијата од сите $m-$члени подмножества на дадено множество очигледно ги задоволува условите на задачата, па затоа во овој случај навистина бараниот максимален број членови на фамилијата $\mathbb{F}$ е еднаков на $\binom{n}{m} = \binom{n}{[n/2]}$. Ако $n = 2m+1$, на фамилијата $\mathbb{F}$ може да и припаѓаат само подмножества на даденото множество кои имаат m или $m+1$ елементи. Ако таа се состои од сите $m-$члени подмножества (или од сите $(m+1)-$члени подмножества), тогаш бројот на нејзините елементи е $\binom{n}{m} = \binom{n}{m+1} = \binom{n}{[n/2]}$. Како во првиот дел од задачата се докажува дека фамилија која содржи $m-$члени и $(m+1)-$члени подмножества, а ги задоволува условите на задачата, не може да има повеќе од наведениот број елементи.