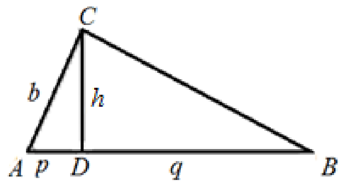
Ристо Малчески
Скопје

ЗЛАТЕН ПРЕСЕК И ЗЛАТЕН ПРАВОАГОЛНИК

Познати ни се Евклидовите теореми за правоаголниот триаголник, кои гласат:

Теорема 1. Катетата кај правоаголниот триаголник е еднаква на геометриската средина на хипотенузата и нејзината ортогонална проекција на хипотенузата, односно $b^2 = pc$, т.е. $b:c = p:b$, (цртеж десно). □



Теорема 2. Висината во правоаголниот триаголник повлечена кон хипотенузата е еднаква на геометриската средина на ортогоналните проекции на катетите врз хипотенузата, односно $h^2 = pq$, т.е. $h:q = p:h$, (цртеж десно). □

Доказите на претходните две теореми нема да ги презентираме , но ќе забележиме дека првата следува од $\triangle ACB \sim \triangle ADC$, а втората следува од $\triangle ACD \sim \triangle CBD$. Забележуваме дека и во двете теореми имаме пропорции од видот $x:u = v:x$ или $u:x = x:v$, т.е. пропорција во кои двата надворешни или двата внатрешни члена се еднакви. Пропорцијата од наведениот вид ја нарекуваме *непрекината пропорција*.

1. Поделба на отсечка по златен пресек

Покрај непрекинатата пропорција од посебен интерес е една друга пропорција, слична на непрекинатата пропорција, а која произлегува од следниов проблем:

Дадена отсечка AB со точка M да се подели на два дела така што AB да се однесува спрема својот подолг дел AM, како нејзиниот подолг дел AM спрема пократкиот дел MB, односно

$$\overline{AB} : \overline{AM} = \overline{AM} : \overline{MB}. \qquad (1)$$

Последното значи дека должината на подолгиот дел на поделената отсечка е еднаква на квадратната средина на должините на отсечката и пократкиот дел. Оваа поделба на дадена осечка во литературата е позната како *по-*

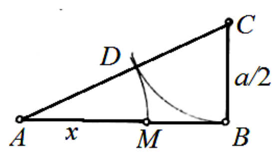
делба по златен пресек. Поделбата по златен пресек често пати се употребува во уметноста и архитектурата, но истата е важна и за многу чисто математички разгледувања, па затоа прво ќе се задржиме на конструкцијата на точката M.

Нека $\overline{AB}=a$. За да ја определиме точката M (цртеж десно), односно отсечката AM, да означиме $\overline{AM}=x$. Тогаш $\overline{MB}=\overline{AB}-\overline{AM}=a-x$. Според тоа, пропорцијата (1) го добива видот

$$a:x=x:(a-x). \qquad (2)$$

Од (2) се добива $x^2=a(a-x)$, односно $x^2+ax=a^2$, па ако на двете страни на последното равенство додадеме $(\frac{a}{2})^2$, по средувањето го добиваме равенството

$$(x+\tfrac{a}{2})^2=a^2+(\tfrac{a}{2})^2. \qquad (3)$$



Сега, од обратната Питагорова теорема следува дека $x+\frac{a}{2}$ е хипотенуза на правоаголен триаголник со катети a и $\frac{a}{2}$. Според тоа, кога од хипотенузата на правоаголниот триаголник чии катети се $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=\frac{a}{2}$ ќе се одземе отсечката $\overline{CD}=\frac{a}{2}$, тогаш преостанатиот дел $\overline{AD}$ на хипотенузата $\overline{AC}$ ќе биде еднаков на бараната должина $x=\overline{AM}$ од отсечката AB. Според тоа, го конструираме триаголникот ABC со катети $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=\frac{a}{2}$. Потоа $D=AC\cap k(C,\frac{a}{2})$ и $M=AB\cap k(A,\overline{AD})$.

Забелешка. Равенството (3) е еквивалентно со равенството

$$(x+\tfrac{a}{2})^2=\tfrac{5a^2}{4},$$

од каде добиваме $x+\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, односно

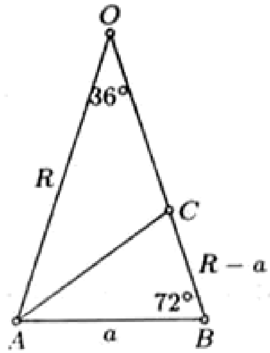
$$x=\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0,6180339887498948a.$$

2. Конструкција на правилен десетаголник и правилен петаголник впишан во кружница со даден радиус

Поделбата на отсечка по златен пресек може да се искористи за конструкција на правилен десетаголник впишан во кружница со даден радиус

R, што значи за поделба на кружница на десет еднакви делови. Имено, ќе докажеме дека за радиусот R на опишаната кружница околу правилниот десетаголник и должината на неговата страна a важи

$$R:a=a:(R-a).$$



Нека $\triangle ABO$ (цртеж десно) е еден од десетте карактеристични триаголници на правилниот десетаголник и нека AC е симетралата на $\measuredangle OAB$. Имаме, $\measuredangle OAB=\measuredangle OBA=72^\circ$ и $\measuredangle AOB=36^\circ$, па затоа $\measuredangle BAC=\measuredangle OAC=36^\circ$ и $\measuredangle BCA=72^\circ$. Тоа значи дека триаголниците BCA и OAC се рамнокраки и важи $\overline{AC}=\overline{OC}=\overline{AB}=a$. Понатаму, $\triangle ABO\sim\triangle BCA$ и затоа важи $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC}$, односно

$$\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:(\overline{OB}-\overline{OC}), \text{ т.е. } R:a=a:(R-a),$$

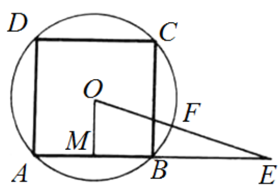
што и требаше да се докаже.

Според тоа, за определување на должината на страната a на правилен десетаголник, впишан во кружнца со радиус R, треба R да се подели по златен пресек. Тогаш поголемиот дел од радиусот е еднаков на страната на правилниот десетаголник, односно

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R. \qquad (4)$$

Претходно видовме како отсечка се дели по златен пресек. Сега, откако радиусот R на опишаната кружница ќе го поделиме по златен прсек и ќе ја најдеме страната a на правилниот десетаголник, истата како тетива ќе ја пренесеме десет пати на кружницата $k(O,R)$, со што ќе ги добиеме темињата на правилниот десетаголник.

Користејќи ја релацијата (4) ќе покажеме како на друг начин може да се конструира правилен десетаголник впишан во кружница со радиус R.



Во дадената кружница $k(O,R)$ впишуваме квадрат $ABCD$ (цртеж десно). Страната AB ја продолжуваме преку темето B до точката E така што $\overline{BE}=\overline{AB}$. Понатаму, $F=OE\cap k(O,R)$ и M е подножјето на нормалата повлечена од точката O на правата AB. Од Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник OEM следува

$$\overline{OE}^2=\overline{OM}^2+\overline{ME}^2. \qquad (5)$$

Сега,

$$\overline{AB}=x=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2},\ \overline{OM}=\frac{x}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{2},\ \overline{ME}=\frac{3x}{2}=\frac{3R\sqrt{2}}{2},\ \overline{OE}=R+\overline{FE},$$

па со замена во (5) добиваме

$$(R+\overline{FE})^2=\frac{R^2}{2}+\frac{9R^2}{2}=5R^2,$$

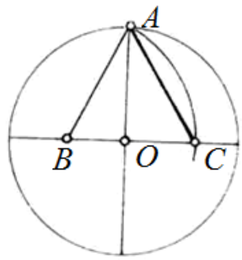
од каде што следува $R+\overline{FE}=R\sqrt{5}$. Конечно, ако се има прадвид равенството (4) добиваме

$$\overline{FE}=(\sqrt{5}-1)R=2a. \qquad (6)$$

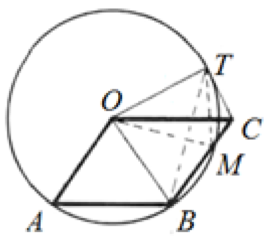
Сега повлекуваме симетрала на отсечката FE, со што ја определуваме должината на страната a на правилниот десетаголник, па истиот може да се конструира.

Јасно, откако ќе ги добиеме темињата на правилниот десетаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$, ние всушност сме конструирале и правилен петаголник $A_1A_3A_5A_7A_9$ или $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ вписан во кружница со радиус R. Меѓутоа, кога е даден радиусот на опишаната кружнца, страната на правилниот петаголник може едноставно да се конструира. Како се добива должината на страната a на правилен петаголник кога е даден раиусот на опишаната кружница е прикажано на цртежот десно на кој

$$\overline{OA}=R, \overline{BO}=\frac{R}{2}, \overline{BC}=\overline{BA}.$$



Јасно, должината на катетата OA на правоаголниот триаголникот OAC е еднаква на должината на страната на вписаниот правилен шестаголник, а должината на катетата OC е еднаква на должината на страната на вписаниот правилен десетаголник. Ќе докажеме дека должината на хипотенузата AC е еднаква на должината на страната на правилниот петаголник вписан во кружницата со радиус R. За таа цел ќе докажеме дека ако во правоаголен триаголник едната катета е еднаква на радиусот на опишаната кружницата а другата е еднаква на страната на правилниот десетаголник, тогаш хипотенузата е еднаква на страната на вписаниот правилен петаголник во таа кружница.



Нека AB е страната на правилен петаголник вписан во кружница со радиус $R=\overline{OA}$ (цртеж десно). Конструираме паралелограм $OABC$. Нека M е пресечната точка на страната BC и кружницата $k(O,R)$. Од $\measuredangle OBM = \measuredangle AOB = 72^\circ$, следува дека во рамнокракиот триаголник OBM важи $\measuredangle BOM = 36^\circ$, што значи дека BM е страната на правилниот десетаголник впишан во кружницата $k(O,R)$. Според тоа, точката M ја дели отсечката BC по златен пресек, што значи дека важи

$$\overline{BC} : \overline{BM} = \overline{BM} : \overline{MC}, \text{ т.е. } \overline{BM}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{MC}.$$

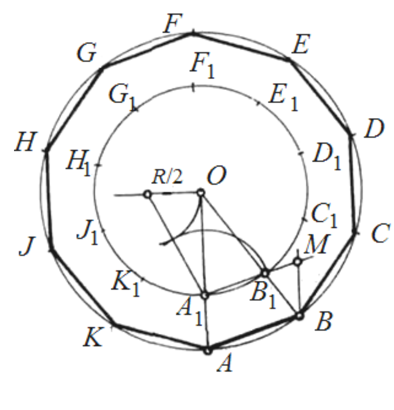
Нека T е допирната точка на тангентата повлечена од точката C на кружницата $k(O,R)$. За триаголниците TMC и TBC аголот кај темето C е заеднички, т.е. $\measuredangle TMC = \measuredangle TBC$, а важи и $\measuredangle CTM = \measuredangle TBC$, бидејќи $\measuredangle TBC$ е периферички, а $\measuredangle CTM$ е агол меѓу тетива и тангента. Според тоа, $\triangle TMC \sim \triangle TBC$. Од сличноста на овие триаголници следува

$$\overline{BC} : \overline{TC} = \overline{TC} : \overline{MC}, \text{ т.е. } \overline{TC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{MC}.$$

Значи, $\overline{TC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{MC} = \overline{BM}^2$, од каде следува $\overline{TC} = \overline{BM}$, т.е. отсечката TC е еднаква на страната на впишаниот правилен десетаголник. Така, докажавме дека триаголникот OTC ги има саканите својства: катета $\overline{OT} = R$, катетата TC е еднаква на страната на впишаниот правилен десетаголник и хипотенузата OC е еднаква на страната на впишаниот правилен петаголник.

3. Конструкција на правилен десетаголник и правилен петаголник со дадена должина на страна

Во овој дел прво ќе дадеме посредна конструкција на правилен десетаголник со дадена должина на страна a. Прво, како во претходната точка конструираме правилен десетаголник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1J_1K_1$ впишан во кружница со произволен радиус R (види цртеж). Понатаму, за да се добие правилен десетаголник со дадена должина на страна $\overline{AB} = a$, на полуправата A_1B_1 нанесуваме отсечка $\overline{A_1M} = a$, па низ точката M повлекуваме права паралелна со радиусот OA_1 и во пресекот на оваа права со полуправата OB_1 ја наоѓаме точката B (цртеж десно). Јасно, OB е радиусот на опишаната круж-



ница околу правилниот десетаголник со должина на страна $\overline{AB}=a$. Сега, ја цртаме кружницата $k(O,\overline{OB})$, а потоа преостанатите темиња на правилниот десетаголник A,C,D,E,F,G,H,J,K ги добиваме во пресекот на полуправите $OA_1,OC_1,OD_1,OE_1,OF_1,OG_1,OH_1,OJ_1,OK_1$, соодветно и кружницата $k(O,\overline{OB})$.

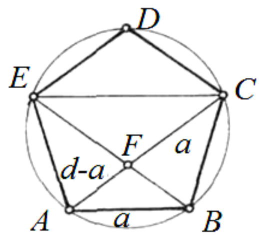
Да забележиме дека во случај кога $a<\overline{A_1B_1}$, точката M се наоѓа меѓу A_1 и B_1, па затоа во овој случај точката B ќе се наоѓа меѓу точките O и B_1.

Јасно, на потполно ист начин, прво со конструирање на правилен петаголник впишан во кружница со произволен радиус R, а потоа користејќи ја горната постапка можеме да конструираме правилен петаголник со дадена должина на страна.

Во продолжение ќе дадеме непосредни конструкции на правилен петаголник и правилен десетаголник со дадена должина на страна a.

Непосредната конструкција на правилниот петаголник се темели на следнава алгебарска анализа.

Во правилниот петаголник $ABCDE$ (цртеж десно) ги повлекуваме дијагоналите AC и BE, кои се сечат во точката F, а потоа ја повлекуваме и дијагоналата CE. Должината на дијагоналата на правилниот петаголник да ја означиме со d. Секоја дијагонала на правилниот петаголник е паралелна со по една страна, па затоа четириаголникот $CDEF$ е ромб, т.е. важи $\overline{FC}=\overline{ED}=a$ и $\overline{AF}=d-a$. Триаголниците ECD и ABF имаат по парови паралелни страни, што значи дека тие се слични. Од оваа сличност следува $\overline{EC}:\overline{ED}=\overline{AB}:\overline{AF}$, односно

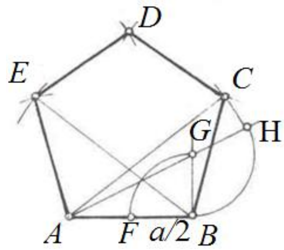


$$d:a=a:(d-a), \tag{7}$$

што значи дека точката F ја дели дијагоналата AC по златен пресек. Понатаму, со алгебарски трансформации добиваме дека од пропорцијата (7) последователно следуваат равенствата

$$\begin{aligned}
&d^2-ad=a^2,\\
&d^2-ad+(\tfrac{a}{2})^2=a^2+(\tfrac{a}{2})^2,\\
&(d-\tfrac{a}{2})^2=a^2+(\tfrac{a}{2})^2,\\
&d=\tfrac{a}{2}+\sqrt{a^2+(\tfrac{a}{2})^2}.
\end{aligned}$$

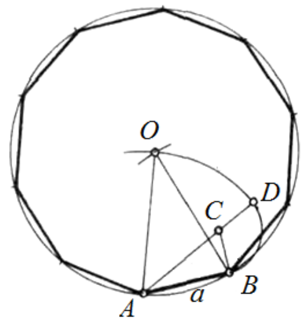
Последното равенство всушност ја дава конструкцијата на правилен петаголник со дадена должина на страна a. Конструираме правоаголен триаголник со катети a и $\frac{a}{2}$, на цртежот десно тоа е $\triangle ABG$, кај кој согласно Питагоровата теорема должината на хипотенузата е $\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}$.



Понатаму, преку точката G ја продолжуваме хипотенузата AG за $\frac{a}{2}$ и ја добиваме точката H. Со тоа ги определивме трите страни на триаголниците ABC и ABE, кои лесно ги конструираме, а потоа го конструираме и темето D, цртеж десно.

Во продолжение ќе ја дадеме непосредната конструкција на правилен десетаголник со дадена должина на страна a. Како што видовме, ако радиусот на опишаната кружница околу правилниот десетаголник е еднаков на x, тогаш $x:a=a:(x-a)$, од каде со непосредни пресметувања последователно добиваме

$$x^2-ax=a^2,$$
$$(x-\tfrac{a}{2})^2=a^2+(\tfrac{a}{2})^2,$$
$$x=\tfrac{a}{2}+\sqrt{a^2+(\tfrac{a}{2})^2}.$$

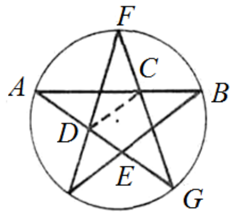


Според тоа, за да го конструираме правилниот десетаголник, прво конструираме правоаголен триаголник ABC со катети a и $\frac{a}{2}$, потоа преку точката C ја продолжуваме хипотенузата AC за должина $\frac{a}{2}$, со што ја добиваме точката D. Јасно, $x=\overline{AD}$ е радиусот на опишаната кружница околу правилниот десетаголник. Сега го конструираме рамнокракиот триаголник ABO со крак $\overline{AO}=x=\overline{AD}$, а потоа лесно го конструираме правилниот десетаголник (види цртеж).

4. Правилна петкрака ѕвезда и златен правоаголник

Правилната петокрака ѕвезда е симбол кој се користи во најразлични пригоди. Имено, таа се среќава на знамињата на повеќе земји, без разлика на нивното општествено уредување, а правилната петокрака ѕвезда била симбол на Питагорејците, кои ја сметале за симбол на здравјето.

Ќе докажеме дека секоја од петте отсечки, кои ја формираат петокраката ѕвезда, дели две од преостанатите отсечки по златен пресек (цртеж десно).



Од сличноста на триаголниците ABE и ACD следува $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AE}:\overline{AD}$. Но, $\overline{AD}=\overline{CB}$ и $\overline{AE}=\overline{AC}$, па затоа $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$, што значи дека точката C ја дели отсечката AB по златен пресек. Според тоа, отсечката FG ја дели отсечката AB по златен пресек.

Правоаголникот чија пократка страна b се однесува спрема неговата подолга страна a исто како што подолгата страна a се однесува спрема полупериметарот $a+b$, т.е. за кој важи

$$b:a=a:(a+b) \tag{8}$$

го нарекуваме *златен правоаголник*. Забележуваме дека кај златниот правоаголник всушност имаме поделба на полупериметарот по златен пресек.

Сега, да видиме како може да се конструира златниот правоаголник ако е позната едната од неговите страни. Од равенството (8) добиваме

$$ab+b^2=a^2, \tag{9}$$

а оттука, ако сакаме да ја изразиме, на пример, подолгата страна a со помош на пократката страна b, од (9) последователно добиваме

$$a^2-ab=b^2,$$

$$a^2-ab+\tfrac{b^2}{4}=b^2+\tfrac{b^2}{4},$$

$$(a-\tfrac{b}{2})^2=\tfrac{5b^2}{4},$$

$$a-\tfrac{b}{2}=\tfrac{b\sqrt{5}}{2},$$

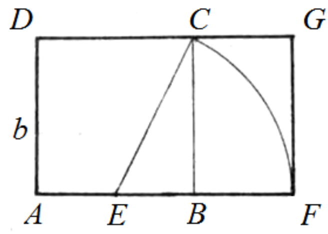
т.е.

$$a=\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}b. \tag{10}$$

Но, користејќи го равенството (10), можеме пократката страна да ја изразиме со помош на подолгата и притоа се добива дека

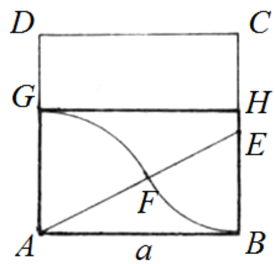
$$b=\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}a. \tag{11}$$

Понатаму, сето ова можеме да го направиме и конструктивно. Така, на пример, ако ни е позната пократката страна b, а треба да ја определиме подолгата страна a на златниот правоаголник, постапуваме на следниот начин.



Конструираме квадрат $ABCD$ над отсечката b и ја определуваме средината E на неговата основа (цртеж десно). Околу точката E опишуваме кружен лак со радиус $\overline{EC}$ кој ја сече полуправата AB во точката F. Сега, бидејќи $\overline{EC}=\sqrt{b^2+(\frac{b}{2})^2}=\frac{b\sqrt{5}}{2}$, добиваме дека $\overline{AF}=\frac{b}{2}+\frac{b\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}b$, што значи дека $\overline{AF}$ е бараната подолга страна на златниот правоаголник, а $AFGD$ е златниот правоаголник.

Ако пак ни е позната подолгата страна a на златниот правоаголник, тогаш постапуваме на следниов начин.



Конструираме квадрат $ABCD$ над отсечката a и ја определуваме средината E на страната BC (цртеж десно). Околу точката E опишуваме кружен лак со радиус $\overline{EC}$ кој ја сече отсечката AE во точката F. Потоа околу точката A опишуваме кружен лак со радиус $\overline{AF}$ кој ја сече страната AD во точката G. Сега, бидејќи $\overline{AE}=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, добиваме дека $\overline{AG}=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, што значи дека $\overline{AG}$ е бараната пократка страна на златниот правоаголник, а $ABHG$ е златниот правоаголник.

Останува уште да забележиме дека кога е познат полупериметарот на златниот правоаголник, тогаш за да ги определиме должините на неговите страни доволно е полупериметарот да го поделиме по златен пресек.