Самоил Малчески
Скопје

РАСЕКУВАЊЕ НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

Повеќето математичари расекувањето (дисекцијата) на геометриските фигури на повеќе делови, при што треба да се задоволат определени услови, го сметаат за дел од таканаречената забавна геометрија. Меѓутоа, проблемите на дисекција на геометриски фигури во многу случаи се исклучително тешки и за нивно решавање се потребни сериозни математички знаења.

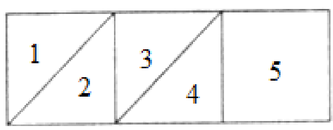
Проблемот на геометриските дисекции (поделба со сечење) прв пат систематски го обработил Мохамед Абул-Вафа ал-Бузјани, познат персиски астроном и математичар кој живеел во Багдат во X век. Абул Вафа ја истражувал орбитата на Месечината и за тоа го напишал делото *Теорија на месечината.* Тој на арапски го превел познатото дело на Диофант *Аритметика* и дал голем допринос во развојот на тригонометријата – прв ја користел функцијата тангенс (tg), а ги вовел и тригонометриските функции секанс ($\sec$) и косеканс (cosec). Меѓу другото Абул-Вафа развил и нов метод за пресметување на вредностите на функцијата синус ($\sin$), кој го применил за изработка на тригонометриски таблици со точност до 8 децимални места.

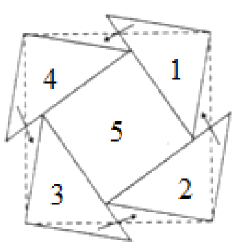
На почетокот на дваесеттиот век познатиот германски математичар Давид Хилберт (1862-1943) формулирал теорема која тврди дека произволем многуаголник може да се расече на конечен број делови од кои може да се состави било кој друг многуаголник. Оваа теорема укажува на можноста на трансформација на еден во друг многуаголник со помош на конечен број сечења, но не го дава минималниот број на деловите на расекување. Наоѓањето на овој минимум за дадени многуаголници често пати е многу тежок проблеми во општ случај не е позната постапказа минимизација.

Во следните разгледувања ќе се осврнеме на расекување како на рамнински, така и на просторни геометриски фигури.

Задача 1 (Абул-Вафа). Три идентилчни квадрати расечи на девет делови од кои ќе составиш квадрат.

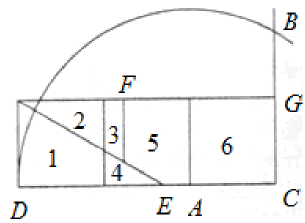
Решение. На следните два цртежи е прикажано решението на Абул-Вафа, во кое два квадрати се расечени долж нивните дијагонали, со што се добиени четири складни триаголници: 1, 2, 3 и 4.

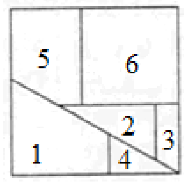




Потоа, четирите складни триаголници се разместуваат околу непресечениот квадрат (цртеж лево), па уште со четири сечења, кои се прават по испрекинатите линии, се добиваат осум триаголници. Четирите големи триаголници остануваат на место, а четирите мали триаголници се поместуваат како што покажуваат стрелките на цртежот, со што се добива бараниот квадрат. Начитателот му препуштаме да докаже дека малиот триаголник добиен во вторите сечења е скалден со триаголникот кој е на местото каде што се врши поместувањето.

Втор начин. Околу 850 години подоцна најголемиот англиски составувач на математички загатки Хенри Дјудени (1857-1931) го решил проблемот на Вафа користејќи само шест сечења. Решението на Дјудени е прикажано на цртежот десно.Точката B е пресек на кружницата $k(A,\overline{AD})$ и полуправата CG. Сега, точките E и F се такви што $\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{FG}$.





Сега сечењата се јасни, при што бараниот квадрат може да се состави од деловите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 како што е прикажано на цртежот лево. Јасно, ако должината на страната на почетните квадрати е a, тогаш составената фигура е правоаголник чија една страна е еднаква на $\overline{DE}=\overline{FG}=\overline{BC}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$. Затоа, и другата страна е еднаква на $\frac{3a^2}{a\sqrt{3}}=a\sqrt{3}$, што значи дека составената фигура е бараниот квадрат. Последното следува и од фактот дека триаголниците (1,4) и (2,3) се слични и притоа важи $a\sqrt{3}:a=(3a-a\sqrt{3}):x$, каде x е подолгат основа на делот 3. Имаме, $x+a=\frac{3a-a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+a=a\sqrt{3}$, што значи дека составената фигура е квадрат со должина на страна $a\sqrt{3}$. ■

Задача 2. Два квадрати со различни должини на страни расечи ги на делови од кои ќе составиш нов квадрат.

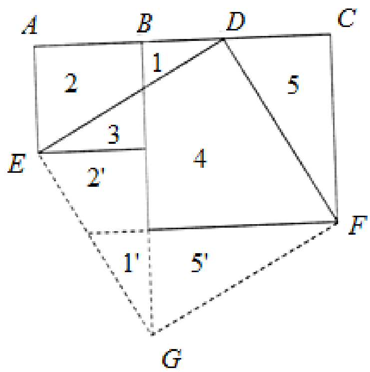
Решение. Ќе дадеме расекување на двата квадрати на пет делови од кои може да се состави квадрат. Ако a и b, $a>b$ се должините на страните на дадените квадрати, тогаш нивните плоштини се a^2 и b^2, па затоа должината на страната на големиот квадрат е $\sqrt{a^2+b^2}$. Последното дава идеја како може да го направиме бараното расекување.

Ги поставуваме квадратите еден до друг како што е прикажано на цртежот десно. На страната BC на големиот квадрат наоѓаме точка D таква што $\overline{CD}=\overline{AE}=b$. Имаме,

$$\overline{AD}=a\,,\ \overline{DF}=\sqrt{a^2+b^2}=\overline{ED}$$

што значи дека DE и DF се страните на новиот квадрат. Понатаму, $\triangle DEA\cong\triangle FDC$, па затоа

$$\measuredangle EDF=180^\circ-\measuredangle EDA-\measuredangle FDC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

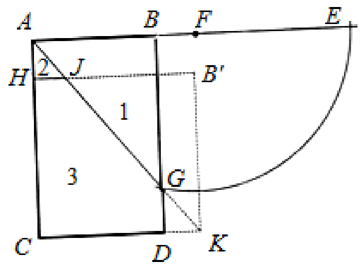


.

Сега, ако триаголникот $\triangle(1,2)$, т.е. $\triangle EDA$ го преместиме на местото на $\triangle(1',2')$, а $\triangle 5$, т.е. $\triangle FDC$ го преместиме на местото на $\triangle 5'$, го добиваме бараниот квадрат. Може да се докаже дека минималниот број делови на кои треба да се расечат двата квадрати е точно пет. ■

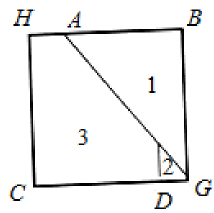
Задача 3. Даден правоаголник подели го на три дела од кои може да се состави квадрат.

Решение. *Прв начин*. Нека $ABDC$ е правоаголникот кој треба да се подели. Квадратот кој треба да го составиме треба да има плоштина еднаква на плоштината на правоаголникот, па затоа за должината a на неговата страна имаме $a=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}$, т.е. таа е еднаква на геометриската средина на страните на правоаголникот.



Ја продолжуваме страната AB преку темето B до точка E таква што $\overline{BE}=\overline{BD}$. Нека F е средина на отсечката AE и конструираме кружница $k(F,\overline{FE})$. Нека G е пресечната точка на кружницата k и отсечката BD. Јасно,

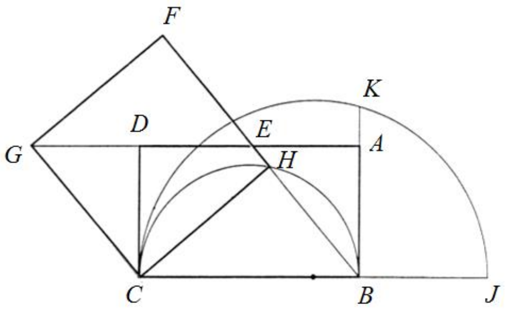
$$\overline{BG}=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BE}}=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BD}},$$



што значи дека BG е должината на страната на бараниот квадрат. Ги поврзуваме точките A и G, а на страната AC наоѓаме точка H таква што $\overline{CH}=\overline{BG}$. Низ точката H повлекуваме права паралелна со CD и во пресек со AG ја наоѓаме точката J. Сега правоаголникот $ABDC$ го сечеме по отсечките AG и HJ, со што ги добиваме $\triangle AHJ \cong \triangle GDK$, $\triangle ABG \cong \triangle JB'K$ и петаголникот $CDGJH$. Сега е јасно дека од добиените делови може да се состави бараниот квадрат и тоа на начин како што е покажано на цртежот десно. Навистина, добиената фигура $CGBH$ е правоаголник кој има еднаква плоштина на плоштината на дадениот правоаголник, едната негова страна е $\overline{CH}=\overline{BG}=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}$, па затоа другата негова страна е

$$\overline{CG}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}{\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}}=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BD}},$$

т.е. $CGBH$ е квадрат.



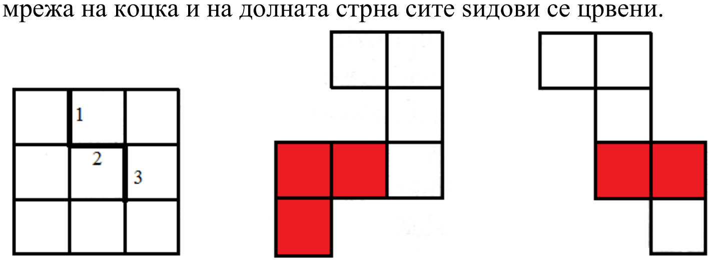
Втор начин. Страната CB ја продолжуваме преку темето B до точка J таква што $\overline{BJ}=\overline{BA}$ (цртеж десно). Потоа, над отсечката CJ како над дијаметар конструираме полукружница, која полуправата BA ја сече во точката K. Јасно,

BK е геометриска средина на CB и BJ, т.е. $\overline{BK}=\sqrt{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}$, што значи дека $\overline{BK}$ е должината на страната на бараниот квадрат.

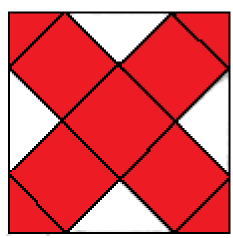
Сега, над CB како над дијаметар конструираме полукружница и потоа точката H ја определуваме како пресек на оваа полукрушница и кружницата $k(C,\overline{BK})$. Должината на отсечката CH е еднаква на должината на страната на бараниот квадрат. Отсечката BH ја продолжуваме преку точката H доточката F така што $\overline{HF}=\overline{BK}$. Нека $E=AD\cap HF$. Така правоаголникот го поделивме на три дела и тоа $\triangle CBH, \triangle BAE$ и четириаголник $CHED$. Сега правоаголниот $\triangle CBH$ го поставуваме на местото на $\triangle GEF$, а $\triangle BAE$ го поставуваме на местото на $\triangle CDG$, со што добиваме правоаголник $CHFG$ и тоа е бараниот квадрат. Докажите на последните две тврдења ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 4. Даден е квадратен лист хартија со димнзии 3×3 кој од едната страна е бел, а од другата страна е црвен. Користејќи сечење и превиткување на хартијата состави мрежа на коцка кај која од едната страна сите ѕидови ќе бидат црвени, при што должината на сите сечења не смее да биде поголема од 3.

Решение. Потребни се точно три сечења, секое со должина 1. Квадратниот лист хартија со димнзии 3×3 го делиме на девет единечни квадрати со димензии 1, а потоа сечеме по линиите кои на долниот лев цртеж се означени со броевите 1, 2 и 3. Сега прво хартијата ја превиткуваме по хоризонтална линија со што се добива формата прикажана на долниот среден цртеш, а потоа ја превиткуваме по вертикална линија со што се добива формата прикажана на долниот десен цртеж. Јасно, тоа е мрежа на коцка и на долната стрна сите ѕидови се црвени.



Задача 5. Даден е квадратен лист хартија со страна $30\,cm$. Определи ја најголемата должина на страната на коцка за која од дадениот лист хартија може да се направи мрежа на коцката. (Мрежата мора да целосна, т.е. во еден дел.)

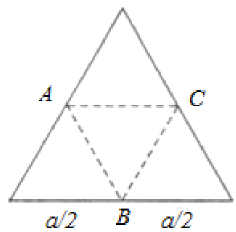


Решение. Без разлика каква е формата на мрежата, таа на една страна мора има четири должини на работ на коцката. Затоа, од дадениот лист хартија ќе направиме мрежа со најголема должина на работ на коцката ако на листот поставиме најдолга можна отсечка, а потоа успееме со $\frac{1}{4}$ од нејзината должина да нацртаме мрежа на коцка. Јасно, мрежата која ја цртаме не мора да биде во класичната форма која ни е позната. Меѓутоа, важно е со истата да можеме со превиткување на хартијата да составиме коцка.

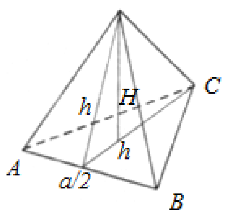
Во квадрат најдолга отсечка е неговата дијагонала, во случајот $30\sqrt{2}\,cm$, па затоа најголемата можна должина на работ на коцката е $\frac{30\sqrt{2}}{4}$. Сега, мрежата ја добиваме така што ги цртаме дијагоналите, а потоа во центарот на листот цртаме квадрат со должина на страна $\frac{30\sqrt{2}}{4}$, чии страни се паралелни со дијагоналите. Потоа ги продолжуваме страните на овој квадрат до пресекот со страните на листот и на тој начин ја добиваме бараната мрежа на коцката која има најголема можна страна.

Задача 6. Од хартија која има форма на рамностран триаголник со должина на страна $a\,cm$ направи тетраедар со најголема можна плоштина. Определи ја должината на страната на триаголникот така што волуменот на тетраедарот ќе биде точно $1\,dm^3$.

Решение. Тетраедарот може да се направи од мрешата прикажана на вртежот десно. На овој начин че се искористи целата хартија, шо значи дека тетраедарот ќе има најголема можна плоштина. Должината на страната на секој од малите триаголници е еднаква на $\frac{a}{2}$, а висината на секој од малите триаголници е $h=\sqrt{(\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{4})^2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.



Според тоа, за висината H на тетраедарот, цртеж десно, добиваме



$$H=\sqrt{h^2-(\frac{h}{3})^2}=\frac{2h\sqrt{2}}{3}=\frac{a}{\sqrt{6}},$$

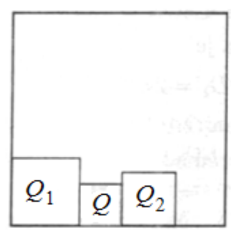
а за волуменот на тетраедарот имаме

$$V=\frac{BH}{3}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{a}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{6}}=\frac{a^3}{6\sqrt{2}}.$$

Оттука добиваме $\frac{a^3}{6\sqrt{2}}=1\,dm^3$, па затоа $a=10\sqrt[6]{72}\,cm$. ■

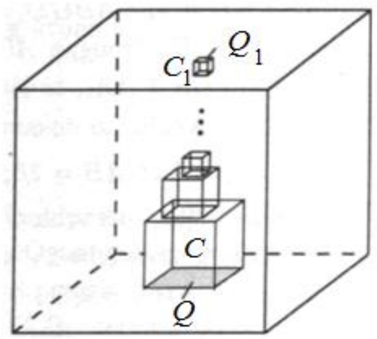
Задача 7. Докажи дека коцка не може да се расече на конечно многу коцки (повеќе од една), меѓу кои нема складни коцки.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Тогаш секој ѕид на коцката е поделен на квадрати. Нека Q е најмалиот меѓу квадратите кои лежат на ѕидовите на коцката. Квадратот Q не може да лежи на внатрешноста на некој раб на ѕидот на коцката. Во спротивно лево и десно од него се наоѓаат поголеми квадрати Q_1 и Q_2 (цретж десно). Меѓутоа, тогаш областа над Q и меѓу Q_1 и Q_2 е непокриена, па таа може да се покрие само со квадрати кои се еднакви или помали од Q. Но, такви квадрати нема бидејќи сите квадрати се различни и Q е најмалиот квадрат. Аналогно се докажува



дека квадратот Q не може да биде во аголот.

Според тоа, квадратот Q е во средината на некој ѕид на коцката и е опкружен со 4 или повеќе поголеми квадрати. Нека квадратот Q се наоѓа на долниот ѕид на коцката и да ги разгледаме коцките чии ѕидови се споменатите квадрати околу квадратот Q. Нека C е коцката која соодветствува на квадратот Q. На горниот ѕид на коцката C се наоѓа коцка со ѕид помал од Q, бидејќи за поголема нема место заради околните коцки (цртеж десно). На горниот ѕид на оваа коцка се наоѓа коцка со помал ѕид. Бидејќи бројот на коцките е конечен, оваа низа коцки завршува со коцка C_1 која со својот горен ѕид Q_1 налегнува на горниот ѕид наголемата коцка. Бидејќи горната коцка C_1 е помала од коцката C, заклучуваме дека квадратот Q_1 е помал од квадратот Q. Последното противречи на изборот на Q. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата. ■

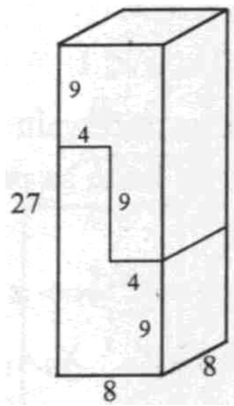


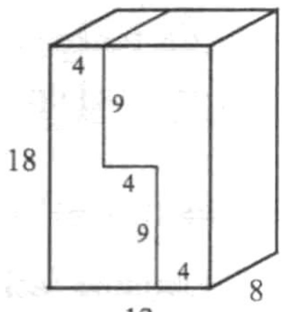
Задача 8. Даден е квадар со димензии $8\times8\times27$. Подели го квадарот на четири дела и со нив состави коцка.

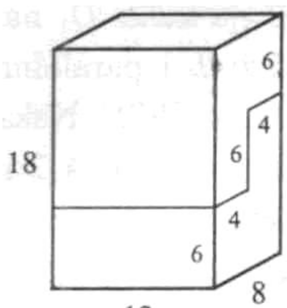
Решение. Волуменот на дадениот квадар е

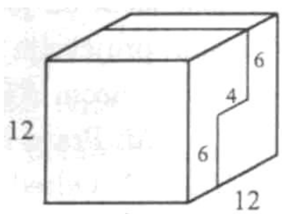
$$V=8\cdot8\cdot27=12^3,$$

што значи дека коцката која треба да ја составиме има раб со должина 12. Последното значи дека при првото расекување треба, на пример, да добиеме едниот раб на квадарот кој ќе го составиме да е со должина 12. Ова може да се направи, ако направиме скалесто расекување прикажано на цртежт десно, а потоа добиените делови ги поставиме како што е прикажано на долниот лев цртеж.







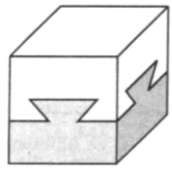


Понатаму, добиеното тело уште еднаш го расекуваме како што е прикажано на средниот горен цртеж, со што добиваме ѕид кој е квадрат со должина на раб 12, а потоа двата дела ги поставуваме како што е прикажано на десниот горен цртеж.

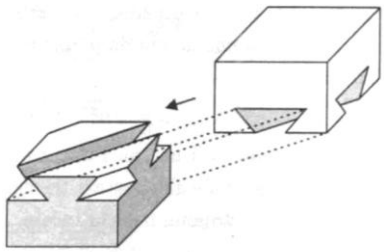
Останува да забележиме дека со првото расекување квадарот е расечен на два дела, а со второто расекување секој од овие два дела е расечен на по два дела, што значи дека имаме вкупно четири делови, како што се бараше во условот на задачата. ■

На крајот од ова наше дружење ќе прикажеме уште едно интересно расекување, во кое повеќе има досетка, отколку математички алгоритам.

Задача 9. Коцка се состои од два камени блока кои се поврзани како на цртежот десно. Двата невидливи бочни ѕида изгледаат исто како и двата видливи бочни ѕида, а долниот ѕид изгледа исто како горниос ѕид. Како овие камени блокови може да се разделат.



Решението на задачата е дадено на долниот цртеж.



Литература

1. Mladenović, P., Petrović, V.: Stereometrija – izabrani problem, Matematiskop, Beograd, 2002
2. Petković, M.: Atraktivna geometrija, Matematiskop, Beograd, 2003

Статијата е објавена во бугарското списание Математика+, број 1/21, ISSN – 8321 (print), ISSN – 4964 (on line)