Самоил Малчески
Скопје

ПОСЕБНИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

Во оваа статија ќе докажеме некои посебни признаци за деливост. Притоа ќе ја користиме теоремата за делење со остаток, која на почетокот ќе ја докажеме.

Теорема 1 (за делење со остаток). За секој $a\in\mathbb{Z}$ и секој $b\in\mathbb{N}$ постојат единствени цели броеви q и r такви што

$$a=bq+r,\quad 0\le r<b. \tag{1}$$

Доказ. Да го разгледаме множеството

$$A=\{...,a-3b,a-2b,a-b,a,a+b,a+2b,a+3b,...\}.$$

Ова множество содржи како негативни така и ненегативни цели броеви. Да го разгледаме множеството B од ненегативни цели броеви кои се содржат во множеството A. Како што знаеме, множеството B има најмал елемент кој е природен број или е еднаков на нула. Нека е тоа бројот $a-qb$ и да го означиме со r. Тогаш важи (1), бидејќи во спротивно, ако $r\ge b$ тогаш бројот $a-(q+1)b$, кој е помал од $a-qb$, ќе биде природен број или еднаков на нула. Со тоа докажавме дека броевите q и r постојат и дека го задоволуваат (1).

Ќе докажеме дека броевите q и r се единствени. Да претпоставиме дека за броевите q_1 и r_1 важи

$$a=bq_1+r_1,\quad 0\le r_1<b. \tag{2}$$

Ако од (1) го одземеме (2), добиваме

$$0=b(q-q_1)+(r-r_1). \tag{3}$$

Според тоа, $b\,|\,(r-r_1)$ и $b\,|\,(r_1-r)$, при што или $r-r_1\ge 0$ или $r_1-r\ge 0$. Нека $r-r_1\ge 0$. Ако $r-r_1>0$, тогаш од $b\,|\,(r-r_1)$ и $0<r-r_1<b$ добиваме дека природен број е делив со природен број кој е поголем од него, што не е можно. Значи $r-r_1=0$, т.е. $r=r_1$. Сега, од (3) добиваме $0=b(q-q_1)$ и бидејќи $b\ne 0$ имаме $q-q_1=0$, т.е. $q=q_1$, што значи дека броевите q и r се единствени. ■

Од теорема 1 непосредно следува дека $b\,|\,a$ ако и само ако остатокот r од делењето на a со b е 0, т.е. $r=0$. Количникот q од теоремата 1 може да биде кој било цел број, а r е некој број од множеството $\{0,1,...,b-1\}$, кое го нарекуваме *множество на остатоци на бројот* b. Меѓутоа во некои случаи корисно е позитивен остаток да се замени со соодветниот негативен остаток.

Понатаму, за нашите разгледувања ни е потребно и следнава теорема.

Теорема 2. Збирот на природните броеви a и b е делив со природниот број c ако и само ако збирот на остатоците на броевите a и b при делење со бројот c е делив со c.

Доказ. Според теоремата за делење со остаток, за броевите a и b имаме $a=cq_1+r_1$ и $b=cq_2+r_2$. Значи,

$$a+b=(cq_1+r_1)+(cq_2+r_2)=c(q_1+q_2)+r_1+r_2,$$

што значи дека $a+b$ е делив со c ако и само ако r_1+r_2 е делив со c. ■

Нека се дадении целиот број a чиј запис во декаден броен систем е

$$a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0 \qquad (4)$$

и бројот $b, b>0$. Редоследно со бројот b да ги поделиме степените (декадните единици) $10,10^2,...,10^{n-1},10^n$, при што согласно теоремата за делење со остаток добиваме:

$$\begin{aligned}
&10=bq_1+r_1, && 0\le r_1<b,\\
&10^2=bq_2+r_2, && 0\le r_2<b,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\
&10^{n-1}=bq_{n-1}+r_{n-1}, && 0\le r_{n-1}<b,\\
&10^n=bq_n+r_n, && 0\le r_n<b,
\end{aligned} \qquad (5)$$

каде $q_i, i=1,2,...,n$ се количниците, а r , $i=1,2,...,n$ се остатоците од делењето. Ако од (5) замениме во (4) добиваме

$$a=a_n(bq_n+r_n)+a_{n-1}(bq_{n-1}+r_{n-1})+...+a_2(bq_2+r_2)+a_1(bq_1+r_1)+a_0,$$

односно

$$a=(a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+...+a_2q_2+a_1q_1)b+s,$$

каде

$$s=a_nr_n+a_{n-1}r_{n-1}+...+a_2r_2+a_1r_1+a_0. \qquad (6)$$

Конечно, од горните разгледувања заклучуваме дека,

$$b\,|\,a \text{ ако и само ако } b\,|\,s.$$

Признак за деливост со 2. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 2 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n$. Од $2|10^k$ за $k=1,2, ..., n$ следува $r_k=0$, за $k=1,2,...,n$. Сега, ако замениме во (6) добиваме $s=a_0$, па затоа $2|a$ ако и само ако $2|a_0$, односно ако и само ако бројот е парен. ■

Признак за деливост со 3. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 3 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n$. Од

$$\begin{aligned} 10 &= 3\cdot 3+1, \\ 10^2 &= 3\cdot 33+1, \\ 10^3 &= 3\cdot 333+1, \\ &.......................... \\ 10^{n-1} &= 3\cdot \underbrace{33...33}_{n-1}+1, \\ 10^n &= 3\cdot \underbrace{33...33}_{n}+1, \end{aligned}$$

следува $r_k=1$, за $k=1,2,...,n$. Сега, ако замениме во (6) добиваме

$$s=a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0,$$

па затоа $3|a$ ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3. ■

Признак за деливост со 4. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 4 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n$. Од

$$\begin{aligned} 10 &= 4\cdot 2+2, \\ 10^2 &= 4\cdot 25, \\ 10^3 &= 4\cdot 250, \\ &...................... \\ 10^{n-1} &= 4\cdot 25\underbrace{00...0}_{n-3}, \\ 10^n &= 4\cdot 25\underbrace{00...00}_{n-2}, \end{aligned}$$

следува $r_1=2$ и $r_k=0$ за $k=2,3,...,n$. Сега, ако замениме во (6) добиваме

$$s=2a_1+a_0,$$

па затоа $4|a$ ако и само ако $4|2a_1+a_0$. ■

Признак за деливост со 5. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 5 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n$. Од $5|10^k$ за $k=1,2, ..., n$ следува $r_k=0$, за $k=1,2,...,n$. Сега, ако замениме во (6) добиваме $s=a_0$, па затоа $2|a$ ако и само ако $2|a_0$, односно ако и само ако цифрата на едиците на бројот a е 0 или 5. ■

Признак за деливост со 8. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 8 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n$. Од

$$10=8\cdot 1+2,$$
$$10^2=8\cdot 12+4,$$
$$10^3=8\cdot 125,$$
$$......................$$
$$10^{n-1}=8\cdot 125\underbrace{00...0}_{n-4},$$
$$10^n=8\cdot 125\underbrace{00...00}_{n-3},$$

следува $r_1=2$, $r_2=4$ и $r_k=0$ за $k=3,4,...,n$. Сега, ако замениме во (6) добиваме

$$s=4a_2+2a_1+a_0,$$

па затоа $8|a$ ако и само ако $8|4a_2+2a_1+a_0$. ■

Признак за деливост со 9. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 9 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n$. Од

$$10=9\cdot 1+1,$$
$$10^2=9\cdot 11+1,$$
$$10^3=9\cdot 111+1,$$
$$..........................$$
$$10^{n-1}=9\cdot \underbrace{11...11}_{n-1}+1,$$
$$10^n=9\cdot \underbrace{11...11}_{n}+1,$$

следува $r_k=1$, за $k=1,2,...,n$. Сега, ако замениме во (6) добиваме

$$s=a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0,$$

па затоа $9|a$ ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9. ■

Признак за деливост со 7. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 7 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n, ...$. Од

$$\begin{aligned}
1 &= 7\cdot 0+1,\\
10 &= 7\cdot 1+3,\\
10^2 &= 7\cdot 14+2,\\
10^3 &= 7\cdot 142+6,\\
10^4 &= 7\cdot 1428+4,\\
10^5 &= 7\cdot 14285+5,\\
10^6 &= 7\cdot 142857+1,\\
10^7 &= 7\cdot 1428571+3,\\
10^8 &= 7\cdot 14285714+2,\\
10^9 &= 7\cdot 142857142+6,\\
10^{10} &= 7\cdot 1428571428+4,\\
10^{11} &= 7\cdot 14285714285+5,\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

следува

$$\begin{aligned}
&r_0=1, r_1=3, r_2=2, r_3=6, r_4=4, r_5=5,\\
&r_6=1, r_7=3, r_8=2, r_9=6, r_{10}=4, r_{11}=5,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&r_{6k}=1, r_{6k+1}=3, r_{6k+2}=2, r_{6k+3}=6, r_{6k+4}=4, r_{6k+5}=5,\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Сега, ако замениме во (6) добиваме $7\,|\,a$ ако и само ако 7 е делител на $s=a_0+3a_1+2a_2+6a_3+4a_4+5a_5+a_6+3a_7+2a_8+6a_9+4a_{10}+5a_{11}+...$. ■

Признак за деливост со 11. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 11 редоследно декадните единици $10, 10^2, ..., 10^{n-1}, 10^n$. Ако остатокот 10 го замениме со соодветниот остаток -1, за декадните единици 10^{2k} и 10^{2k+1} последователно добиваме

$$\begin{aligned}
10^{2k} &= (10^2-1)((10^2)^{k-1}+...+10^2+1)+1\\
&= 9\cdot 11(100^{k-1}+100^{k-2}+...+100+1)+1
\end{aligned}$$

и

$$10^{2k+1}=(10+1)(10^{2k}-10^{2k-1}+...+10^2-10+1)-1$$
$$=11(10^{2k}-10^{2k-1}+...+10^2-10+1)-1,$$

што значи дека $r_{2k}=1$ и $r_{2k+1}=-1$ за $k=1,2,3,...$. Сега, ако замениме во (6) добиваме

$$s=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-...+a_{2k}-a_{2k+1}+...$$
$$=(a_0+a_2+a_4+...+a_{2k}+...)-(a_1+a_3+a_5+...+a_{2k+1}+...)'$$

па затоа $11|a$ ако и само ако разликата од збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места е делива со 11. ■

Признак за деливост со 13. Нека $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ и да ги поделиме со 13 редоследно декадните единици $10,10^2,...,10^{n-1},10^n,...$ при што големите позитивни остатоци ќе ги замениме со соодветните негативни остатоци. Од

$$1=13\cdot 0+1,$$
$$10=13\cdot 1-3,$$
$$10^2=13\cdot 8-4,$$
$$10^3=13\cdot 77-1,$$
$$10^4=13\cdot 769+3,$$
$$10^5=13\cdot 7692+4,$$
$$10^6=13\cdot 76923+1,$$
$$10^7=13\cdot 769231-3,$$
$$10^8=13\cdot 7692308-4,$$
$$10^9=13\cdot 76923077-1,$$
$$10^{10}=13\cdot 769230769+3,$$
$$10^{11}=13\cdot 7692307692+4,$$
$$\text{..}$$

следува

$$r_0=1, r_1=-3, r_2=-4, r_3=-1, r_4=3, r_5=4,$$
$$r_6=1, r_7=-3, r_8=-4, r_9=-1, r_{10}=3, r_{11}=4,$$
$$\text{...}$$
$$r_{6k}=1, r_{6k+1}=-3, r_{6k+2}=-4, r_{6k+3}=-1, r_{6k+4}=3, r_{6k+5}=4,$$
$$\text{...}$$

Сега, ако замениме во (6) добиваме $13|a$ ако и само ако 13 е делител на

$s=a_0-3a_1-4a_2-a_3+3a_4+4a_5+a_6-3a_7-4a_8-a_9+3a_{10}+4a_{11}+\ldots$. ■

РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

1. Определи ја цифрата a така што изразот $17\cdot\overline{16a}+2010\cdot 2012$ е делив со 12.

Решение. Еден број е делив со 12 ако е делив и со 3 и со 4. Број 2010 е делив со 3 и 2012 е делив со 4, па така производот $2010\cdot 2012$ е делив со 12. Ова значи дека изразот $17\cdot\overline{16a}$ исто така мора да биде делив со 12. За да овој број биде делив со 4, ги имаме следните можности за a, $a\in\{0,4,8\}$. За $a=0$, имаме $1+6+0=7$, што не е деливо со 3. За $a=4$, имаме $1+6+4=11$, што не е деливо со 3. За $a=8$, имаме $1+6+8=15$, што е деливо со 3, што значи изразот е делив со 12. Значи $a=8$.

2. На бројот 2012 допиши од левата и од десната страна една иста цифра, така да добиениот шестцифрен број биде делив со 12.

Решение. Нека од левата и од десната страна на бројот 2012 е допишана цифрата *a*. За да бараниот шестцифрен број $\overline{a2012a}$ биде делив со 12, тој мора да биде делив со 3 и со 4. Заради деливоста со 4, неговиот двоцифрен завршеток може да биде само 24 или 28, па како можни решенија се броевите 420124 и 820128. Збирот на цифрите од првиот број е 13 и не е делив со 3. Бројот 820128 има збир на цифри 21 и делив е со 3, па единствено решение е бројот 820128.

3. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{123ab}$ ќе биде делив со 36.

Решение. *Прв начин*. Еден број е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток $\overline{ab}$ треба да е делив со 4, а од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $6+a+b$ треба да е делив со 9. Со непосредна проверка добиваме дека $\overline{ab}\in\{12,48,84\}$.

Втор начин. Имаме $\overline{123ab}=12300+\overline{ab}=341\cdot 36+24+\overline{ab}$, па затоа $36|\overline{123ab}$ ако и само ако $36|24+\overline{ab}$, од каде следува $\overline{ab}\in\{12,48,84\}$

4. Определи ги цифрите a и b така што збирот на броевите $\overline{199a}$ и $\overline{b234}$ е делив со 18.

Решение. Збирот е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Од деливоста со 2 следува дека бројот $\overline{199a}$ е парен, што значи дека цифрата a мора да е парна. Според тоа, $a \in \{0,2,4,6,8\}$. Понатаму, од деливоста со 9 следува:

- за $a=0$ имаме $1990+\overline{b234}=\overline{(b+2)224}$, па затоа $b+10$ треба да е делив со 9, што значи $b=8$,
- за $a=2$ имаме $1992+\overline{b234}=\overline{(b+2)226}$, па затоа $b+12$ треба да е делив со 9, што значи $b=6$,
- за $a=4$ имаме $1994+\overline{b234}=\overline{(b+2)228}$, па затоа $b+14$ треба да е делив со 9, што значи $b=4$,
- за $a=6$ имаме $1996+\overline{b234}=\overline{(b+2)230}$, па затоа $b+7$ треба да е делив со 9, што значи $b=2$,
- за $a=8$ имаме $1998+\overline{b234}=\overline{(b+2)232}$, па затоа $b+9$ треба да е делив со 9, што значи $b=9$.

5. Наместо буквите a и b во четирицифрените броеви стави соодветни цифри така што збирот $\overline{323a}+\overline{b410}$ ќе биде делив со 9.

Решение. Имаме:

$$\overline{323a}+\overline{b410}=\overline{(b+3)64a}.$$

Ако $b+3\le 9$, т.е. $b\le 6$, тогаш збирот на цифрите на бројот $\overline{(b+3)64a}$ е еднаков на $13+(a+b)$, па затоа бројот $\overline{(b+3)64a}$ е делив со 9 ако и само ако збирот на цифрите $13+(a+b)$ е делив со 9. Тоа е можно ако и само ако $a+b=5$ или $a+b=14$. Но, $b\le 6$ па затоа во овој случај подредениот пар (a,b) е еден од следниве парови: $(0,5),(1,4),(2,3),$ $(3,2),(4,1),(9,5),(8,6)$.

Ако $b+3\ge 10$, т.е. $b\ge 7$, тогаш $\overline{(b+3)64a}=\overline{1(b-7)64a}$, што значи дека збирот на бројот $\overline{(b+3)64a}$ е $(a+b)+4$. Затоа бројот $\overline{(b+3)64a}$ е делив со 9 ако и само ако збирот на цифрите $(a+b)+4$ е делив со 9. Но, $b\ge 7$, па затоа последното е можно ако и само ако $a+b=14$, што значи дека во овој случај подредениот пар (a,b) е еден од следниве парови: $(7,7),(6,8),(5,9)$.

6. На местото на ѕвездичката во бројот $\overline{3145*}$ стави соодветна цифра така што при делење на добиениот број со бројот 3 и со бројот 5 се добијат еднакви остатоци.

Решение. Прво ќе определиме која цифра треба да се стави на местото на ѕвездичката така што бројот $\overline{3145*}$ биде делив со 3 и со 5. Од деливоста со 5 следува дека на местото на ѕвездичката треба да стои цифрата 0 или цифрата 5. Но збирот на цифрите на бројот 31450 е 13, т.е. добиениот број не е делив со 3, па затоа овој случај отпаѓа. Збирот на цифрите на бројот 31455 е 18, што значи дека тој е делив со 3 и овој број е едно решение на задачата. При делењето со 3 и со 5 други заеднички остатоци се 1 и 2, што значи дека останатите решенија на задачата ги добиваме ако бројот 31455 го зголемиме за 1, односно за 2. Конечно, решение на задачата се броевите: 31455, 31456 и 31457.

7. Определи ги цифрите x и y така што бројот $\overline{x74y}$ ќе биде делив со 15.

Решение. Еден број е делив со 15 ако и само ако е делив со 3 и со 5. Од деливоста со 5 следува дека $y=0$ или $y=5$.

Ако $y=0$, тогаш од деливоста со 3 следува дека $x=1,4$ или 7, па во случајов ги добиваме броевите 1740, 4740 и 7740.

Ако $y=5$, тогаш од деливоста со 3 следува $x=2,5$ или 8, па во случајов ги добиваме броевите 2745, 5745 и 8745.

8. Производот на пет последователни природни броеви е $\overline{95a4b}$. Определи ги непознатите цифри.

Решение. Производот на пет последователни природни броеви е делив со 2, со 3, со 4 и со 5. Според тоа, тој е делив со 10, па затоа $b=0$, т.е. бараните броеви е од видот $\overline{95a40}$. Од деливоста со 3 следува дека збирот $9+5+a+4+0=18+a$ треба да е делив со 3, па затоа $a\in\{0,3,6,9\}$. Според тоа, можни решенија на задачата се броевите 95040, 95340, 95640 и 95940. Но бројот мора да е делив со 8, што значи дека неговиот трицифрен завршеток треба да е делив со 8, па затоа можни решенија се само броевите 95040 и 95640. Со разложување на множители непосредно се проверува дека само бројот 95040 е производ на пет последователни природни броеви и тоа $95040=8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12$, па затоа единствено решение на задачата е 95040.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Определи го остатокот при делењето на бројот
$$n=3257^2+1533^2+10589358$$
со бројот 9.
2. На местото на буквите a и b стави соодветни цифри така што бројот $\overline{4a1b}$ ќе биде делив со 12.
3. Во четирицифрениот број $\overline{32\spadesuit 4}$, $\spadesuit$ замени ја со соодветна цифра, така што добиениот број да биде делив со 12.
4. Определи ги сите цифри a така да производот $\overline{17a}\cdot 520$ делив со 12.
5. Определи ја цифрата x така да изразот $13\cdot\overline{16x}+2001\cdot 2000$ биде делив со 12.
6. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{42a4b}$ биде делив со 72.
7. На бројот 4224 допиши му по една цифра од лево и од десно така што добиениот број да биде делив со 45.
8. Определи ги сите четирицифрени броеви од видот $\overline{abba}$ кои се деливи со 45.
9. На местата на ѕвездичките стави цифри така што бројот $\overline{2*44*}$ биде делив со 90.
10. Производот на шест последователни природни броеви е бројот $\overline{66a28b}$. Определи ги цифрите кои треба да стојат на местата на буквите a и b.