Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

ЈЕДАН ЗАДАТАК О ПРАВОУГЛОМ ТРАПЕЗУ

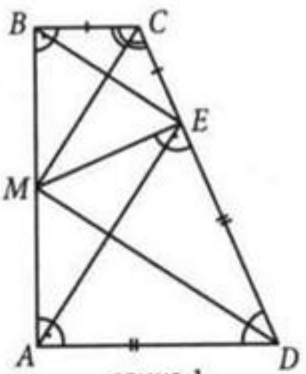
Ратко Тошић, Нови Сад

ЗАДАТАК.

Нека је $ABCD$ четвороугао са правим угловима код темена A и B. Познато је да је $CD=AD+BC$. Симетрала угла $\measuredangle ADC$ сече страницу AB у тачки M. Одреди величину угла $\measuredangle CMD$.

Решење 1.

Нека је E тачка на страници CD таква да је $BC=CE$ (слика 1).



слика 1.

Како је $CD=AD+BC$, то је $ED=AD$. Троуглови MDE и MDA су подударни (СУС), па је

$$\measuredangle MED=\measuredangle MAD=90^\circ.$$

(Приметимо да из последње једнакости следи и да тачка M припада дужи AB, а не њеном продужетку.)

Правоугли троуглови MBC и MEC су подударни (катета и хипотенуза), одакле је $\measuredangle BCM=\measuredangle ECM$.

Како је збир углова четвороугла једнак 360°, то је $\measuredangle C+\measuredangle D=180^\circ$, одакле је

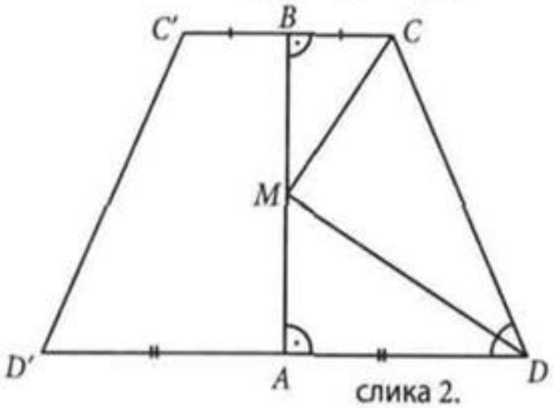
$$\measuredangle DCM+\measuredangle CDM=\frac{1}{2}\measuredangle C+\frac{1}{2}\measuredangle D=90^\circ.$$

Сада из троугла CMD закључујемо да је $\measuredangle CMD=90^\circ$.

Решење 2.

Конструишимо трапез $ABC'D'$ симетричан датом трапезу у односу на праву AB (слика 2). Тада је $CC'D'D$ једнакокраки трапез, при чему је

$CC'+DD'=2BC+2AD=2CD=CD+C'D'$. На основу добијене једнакости закључујемо да је трапез $CC'D'D$ тангентни четвороугао, тј. да се у њега може уписати кружница. Центар те кружнице лежи на оси симетрије AB једнакокраког трапеза и истовремено је тачка пресека симетрала углова тога трапеза. Зато се центар уписане кружнице поклапа са тачком M. Тада је CM симетрала угла $\measuredangle BCD$.

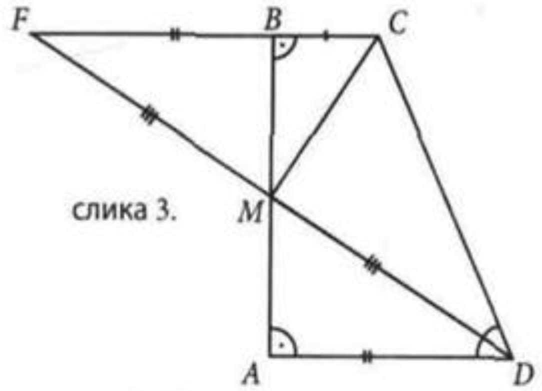


слика 2.

Као у првом решењу закључујемо да је $\measuredangle CMD=90^\circ$.

Решење 3.

Из чињенице да је $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, следи да је $ABCD$ трапез. Нека се праве DM и BC секу у тачки F (слика 3).



слика 3.

Како је $BC \parallel AD$, то је

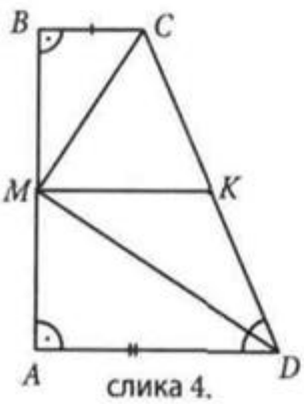
$$\sphericalangle BFM = \sphericalangle ADM = \sphericalangle CDM,$$

па је троугао FCD једнакокрак. Како је

$$CD = BC + AD = CF = BC + BF,$$

то је $BF = AD$. Тада су правоугли троуглови BMF и AMD подударни (катета и оштар угао), па је $MF = MD$. Следи да је CM тежишна линија једнакокраког троугла CDF, према томе и његова висина, одакле следи да је $\sphericalangle CMD = 90^\circ$.

Решење 4.



слика 4.

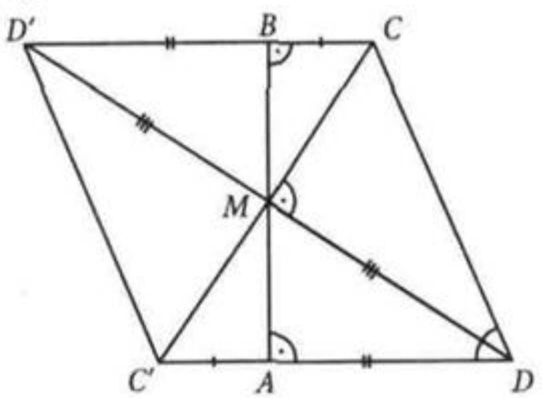
Као у претходном решењу доказујемо подударност троуглова BMF и AMD, одакле следи да је тачка M средиште странице AB. Повуцимо средњу линију MK датог трапеза (слика 4). Тада је

$$MK = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}CD.$$

Добили смо да је у троуглу CMD средња линија једнака половини његове странице CD, што значи да је тај троугао правоугли са правим углом код темена M.

Решење 5.

Конструишимо четвороугао $ABD'C'$ подударан четвороуглу $BADC$ (слика 5).



слика 5.

Како је

$$C'D' = CD = BC + AD = CD' = C'D,$$

то је $CDC'D'$ ромб, DD' је његова дијагонала и истовремено симетрала углова $\sphericalangle C'DC$ и $\sphericalangle C'D'C$. Следи да је M тачка пресека AB и DD'. Правоугли троуглови BMD' и AMD су подударни (катета и оштар угао), па је M средиште дијагонале DD'. Дијагонала CC' такође пролази кроз тачку M и нормална је на дијагоналу DD'. Дакле, $\sphericalangle CMD = 90^\circ$.