Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2017/18 година

ПАСКАЛОВ[4] ТРОУГАО И БРОЈ e

Јенс Карстенсен, Алија Муминагић

Практично нема области у математици у којој се не појављују биномни коефицијенти. Због тога су интензивно проучавани. Посвећивани су им не само чланци, већ и читаве књиге. Једна од најпознатијих је чувена Риорданова монографија [3] која садржи готово све што се о биномним коефицијентима зна. Ипак, још увек се нађе по нека особина која је мало позната или сасвим непозната. О једној таквој биће реч у овом чланку.

Биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ се дефинише као $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где су n и k природни бројеви, $0 \leq k \leq n$. (Ознака $n!$ представља производ природних бројева од 1 до n, тј, $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.) Име су добили по биномној формули

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \ ... + \binom{n}{n}x^0 y^n,$$

правилу за степеновање бинома (двочланог полинома) природним бројем n.

Ако n узима вредности 0, 1, 2, … и ако се биномни коефицијенти поређају као на слици, добија се бесконачна шема, позната као *Паскалов троугао*.

$n = 0$			$\binom{0}{0}$			
$n = 1$		$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$		
$n = 2$	$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$	

[4] Блез Паскал (Blaise Pascal, 1623-1662) француски математичар, физичар и проналазач

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=3 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
n=4 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
n=5 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
n=6 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
\ldots & & & & & & & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Иначе, та шема је била позната и изучавана од стране индуских, персијских, кинеских и других математичара пуно векова пре Паскала. Међутим, Паскал је у свом раду *„Traité du triangle arithmétique“* (1653) први пут, на свеобухватан начин, приказао особине биномних коефицијената као и разне друге особине бројева тог троугла.

Кад се биномни коефицијенти замене својим вредностима, према горњој формули, добија се шема

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & & & & & & & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Добро је познато да је збир свака два суседна коефицијента у истом реду једнака биномном коефицијенту који је између њих и налази се у реду испод. На пример, $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=6+4=10=\binom{5}{3}$. Затим, сума коефицијената k-тог реда, за $n=k$, једнака је 2^k итд. Тако, за $n=4$, имамо $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1+4+6+4+1=16=2^4$.

Ми ћемо посматрати производе биномних коефицијената у n-том реду Паскаловог троугла. Ако тај производ означимо са p_n, имамо да је $p_n=\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. Тако је $p_0=1$, $p_1=1\cdot 1=1$, $p_2=1\cdot 2\cdot 1=2$ итд. Табела доле даје првих неколико вредности p_n.

n	0	1	2	3	4	5	6
p_n	1	1	2	9	96	2500	162000

Лако се види да низ (p_n) брзо и неограничено расте. Посматрајмо, уместо њега, низ (r_n), $n = 1, 2, \ldots$, дефинисан са $r_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$. Имамо да је

$$r_1 = \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1} = 1, \quad r_2 = \frac{2}{1} = 2, \quad r_3 = \frac{9}{2} = 4{,}5, \quad r_4 = \frac{96}{9} = 10{,}66\ldots$$

итд. Низ (r_n) нешто спорије расте од (p_n), али и он „иде у бесконачност“ и то релативно брзо.

Посматрајмо, најзад, низ (t_n) чији у елементи количници суседних чланова низа (r_n), тј. $t_n = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{\frac{p_n}{p_{n-1}}}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = \frac{p_n p_{n-2}}{(p_{n-1})^2}$, $n = 2, 3, \ldots$. Уврштавајући вредности r_n, односно p_n, добијамо

$$t_2 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{1} = 2, \; t_3 = 2{,}25, \quad t_4 = 2{,}370\ldots, \quad t_5 = 2{,}441\ldots, \; t_5 = 2{,}488\ldots$$

Сва три низа заједно у једној табелу изгледају овако.

n	p_n	q_n	t_n
1	1	1	
2	2	2	2
3	9	4,5	2,25
4	96	10,667	2,370
5	2500	20,042	2,441
6	162000	64,800	2,488
…	…	…	…

Очигледно, низ (t_n) далеко спорије расте од (p_n) и (r_n). Да ли и он тежи бесконачности? Следи изненађење.

Теорема. *Кад* $n \to \infty$, *тада* $t_n \to e$, *тј.*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = e,$$

где је $e = 2{,}718\ldots$ *основа природног логаритма.*

У доказу ћемо користити познату граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (1)$$

Доказ теореме. По дефиницији је $p_n = \binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}$. Како је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ и узимајући у обзир да је $0! = 1$, добијамо

$$p_n = \frac{n!}{0!\cdot n!}\cdot\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}\cdot\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot\dots\cdot\frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{(n!)^{n+1}}{(0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot\dots\cdot n!)^2}.$$

Отуда је

$$r_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\frac{(n!)^{n+1}}{(0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot\dots\cdot n!)^2}}{\frac{((n-1)!)^n}{(0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot\dots\cdot(n-1)!)^2}} = \frac{(n!)^{n+1}(0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot\dots\cdot(n-1)!)^2}{((n-1)!)^n(0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot\dots\cdot n!)^2}$$

$$= \frac{(n!)^n\cdot n!}{((n-1)!)^n\cdot(n!)^2} = \frac{((n-1)!)^n\cdot n^n}{((n-1)!)^n\cdot n!} = \frac{n^n}{n!}. \qquad (2)$$

Даље, из (2) следи

$$t_n = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{n^n\cdot(n-1)!}{n!\cdot(n-1)^{n-1}} = \frac{n^{n-1}\cdot n\cdot(n-1)!}{n!\cdot(n-1)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \qquad (3)$$

Кад $n\to\infty$, тада и $n-1\to\infty$, па из (1) и (3) добијамо

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$

□

Литература

[1] H. J. Brothers, Finding *e* in Pascal's triangle, Mathematics Magazine, **85**(2012), No. 1, p. 51.

[2] J. Carstensen, Pascals trekant og *e*, Matematik Magazinet, nr. 64, 2012.

[3] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, John Willey & Sons, 1968.