ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ОД КОМБИНАТОРИКА

Самоил Малчески[1], Даниел Велинов[2]
[1]Меѓународен Славјански Универзитет во Свети Николе
[2]Градежен факултет Скопје, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ во Скопје

Разгледувајќи ги математичките проблеми кои биле на некои од математичките национални или интернационални олимпијади, се забележува дека олимписката комбинаторика се издвојува како убава и стимулирачка област, во која вештините за решавање на проблеми, креативното и логичкото размислување се најважни. Комбинатоориката со акцент на принципите на боење, пребројување, конфигурации и избори, служи како инструмент за развивање на аналитичките способности кај учениците и ги вовлекува во длабочините на математичката убавина.

Олимписката комбинаторика не само што ги тестира математичките вештинии на учениците, туку и ги поттикнува да применуваат креативни и иновативни методи при решавање на проблеми. Комплексноста на комбинаторните задачи создава интересни предизвици, поттикнувајќи ги да размислуваат внимателно и стратегиски. Овие проблеми ги стимулираат да ги прошируваат своите граници и да ги применуваат апстрактните математички концепти во решавањето на реални проблеми.

Задача 1. Во секое теме од правилниот n-аголник $A_1A_2...A_n$ се наоѓа одреден број парички: во темето A_k се наоѓаат точно k парички, за секој $k=1,2,...,n$. Во секој чекор ја правиме следнава трансформација: избираме две парички (не мора од исто теме) и ги префрламе секоја од нив во соседното теме, така што едната ја префрламе во правец на стрелките на часовникот, а другата ја префрламе во правец спротивно од стрелките на часовникот.

Одреди за кои броеви n е можно да се постигне по конечен број на чекори за секој $k=1,2,...,n$ во темето A_k да има точно $n+1-k$ парички.

Решение. Нека a_k е бројот на парички во темето A_k. Да разгледаме што се случува со изразот

$$S=a_1+2a_2+...+na_n$$

при извршување на трансформацијата дадена во задачата.

Доколку не доаѓа до премин на паричка од темето A_1 во A_n ниту обратно, тогаш постои броеви i, j $(i>1, j<n)$ така што паричката од темето

A_i се префрла во темето A_{i-1}, додека паричката од темето A_j се префрла во темето A_{j+1}. По извршената трансформација вредноста на изразот S се менува за

$$\Delta S = -(i-1)a_{i-1} - ia_i - ja_j - (j+1)a_{j+1} + (i-1)(a_{i-1}+1) + i(a_i-1) + j(a_j-1) + (j+1)(a_{j+1}+1) = 0.$$

Ако паричката од темето A_n се префрла во темето A_1, додека другата паричка се префрла од некое теме A_i $(i>1)$ во темето A_{i-1}, вредноста на изразот S ќе се промени за

$$\Delta S = -na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i + n(a_n-1) + (a_1+1) + (i-1)(a_i+1) + i(a_i-1) = -n.$$

Обратно, ако паричката од темето A_1 се префрла во темето A_n, додека другата паричка се префрла од некое теме A_i $(i>1)$ во темето A_{i+1} па вредноста на изразот S, ќе се промени за

$$\Delta S = -na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i + n(a_n+1) + (a_1-1) + i(a_i-1) + (i+1)(a_i+1) = n.$$

Конечно, доколку паричката од темето A_1 се префрли во темето A_n и истовремено паричка од темето A_n се префрли во темето A_1, па очигледно вредноста на изразот S, останува непроменета.

Заклучуваме дека изразот S во секој случај се променува за број кој е делив со n, па остатокот при делење на бројот S со бројот n е инваријанта.

Нека ја означиме со S_P почетната вредност на изразот S и нека S_K е вредноста на изразот која ја добива изразот S доколку дојде до конечниот распоред кој е опишан во задачата.

Имаме

$$S_P = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + \ldots + n\cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

и

$$S_K = 1\cdot n + 2\cdot (n-1) + \ldots + n\cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

За да бараниот конечен распоред се постигне, мора разликата $S_K - S_P$ да биде делива со n. Оваа разлика е еднаква на

$$S_K - S_P = -\frac{(n-1)n(n+1)}{6},$$

а овој број не може да биде делив со n, доколку n не е заемно прост со 6.

Заклучуваме дека потребниот услов за да конечниот распоред може да се постигне е да n е заемно прост со 6, односно n да биде од облик $6k+1$ или $6k+5$.

Ќе докажеме дека тоа е и доволен услов. Нека претпоставиме дека n е од облик $6k\pm1$. Тогаш n е непарен, па постои природен број m, таков што $n=2m+1$.

Во темето A_1 на почетокот се наоѓа една паричка, а на крајот во тоа теме сакаме да има $n-1$ паричка, што значи да нам ни недостигаат $n-1$ паричка. Од друга страна, во темето A_n има $n-1$ паричка вишок. Слично, во темето A_2 ни недостигаат $n-3$ парички, а во темето A_{n-1} има точно $n-3$ парички вишок. На тој начин темињата можеме да ги распоредиме во m парови така што во првото теме од секој пар недостигаат точно онолку парички колку има вишок во второто теме од тој пар. (Во темето A_{m+1} се на почетокот наоѓаат $m+1$ паричка, што е точно онолку парички колку сакаме да има во тоа теме на крајот).

Да разгледаме колку чекори мораме да направиме во една насока за да во секој пар го префрлиме соодветниот број на парички. За парот (A_1,A_n) имаме $n-1$ парички кои треба да поминат оддалеченост 1, за парот (A_2,A_{n-1}) имаме $n-3$ парички кои треба да поминат оддалеченост 3, итн. Вкупниот број на чекори во една насока кои се потребни за да во секое теме би бил соодветниот број на парички е

$$X=1\cdot(n-1)+3\cdot(n-3)+\ldots+(n-2)\cdot2=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Па, со избор на овие X чекори во една насока можеме да постигнеме да во секое теме да се наоѓа бараниот број на парички. Ни останува да докажеме дека е можно да направиме X потези во спротивна насока кои нема да го променат распоредот на паричките.

Да забележиме дека X е делив со n, заради условот да n е заемно прост со 6. Нека $X=qn$. Тогаш бараните X чекори во спротивна насока ги правиме така што да избереме произволна паричка и неа ја вртиме q полни кругови. Лесно забележуваме дека редоследот на овие чекори и во едната и во другата насока можеме да го составиме така што ќе правиме по еден чекор во двата правца.

Задача 2. Некои полиња од правоаголна плоча $n\times m$ $(n,m\geq2)$ се обоени со црна боја, додека останатите полиња се бели. Надвор од плочата

се наоѓа жаба која во еден момент скока на некое поле од крајот на плочата, а потоа прави низа од скокови, скокајќи секој пат на некое од соседните полиња. (За две полиња велиме дека се соседни ако имаат заедничка страна) Секој пат кога жабата доскокнува на некое поле, бојата на тоа поле се менува, од бела во црна или обратно. Дали постои пат по кој жабата може да ја помине и да ја напушти плочата скокајќи од некое поле од крајот на плочата, така што потоа сите полиња да бидат во црна боја?

Решение. I *начин*. Ќе покажеме дека постои таков пат. Нека A е почетно поле на патот на жабата. Нека претпоставиме дека постојат некои полиња на плочата (освен можеби почетното) кои се бели.

Нека B е едно бело поле. Жабата по некој пат доаѓа до полето B и се враќа во полето A по истиот пат. Потоа само полињата B и A ќе ја променат бојата. Со тоа бројот на бели полиња (ако го исклучиме полето A) се намалил за 1. Заклучуваме дека со повторување на оваа постапка можно е да се постигне сите полиња да се црни (освен можеби полето A).

Доколку во тој момент полето A е црно, жабата ја напушта плочата. Ако полето A е бело, тогаш жабата скока на соседно поле од крајот на плочата C, се враќа на полето A, повторно скока на полето C и ја напушта плочата.

II *начин*. Нека избереме еден пат кој ја обиколува плочата така да почне и заврши на крајните полиња и помине низ секое поле точно еднаш (на пример, првиот ред од плочата, а потоа почнувајќи од последното поле од вториот ред итн.).

Кога жабата, почнувајќи го патот, постигне да полето во кое во некој момент напушта црно поле, продолжува да се движи. Во спротивно, доколку напушти бело поле, прави скок наназад, го зацрнува тоа поле и продолжува да се движи по опишаниот пат. На опишаниот начин жабата може да постигне да сите полиња на нејзиниот пат, освен последното поле, црно. Последното поле може да го направи црно, на ист начин кој е опишан на крајот од I начин.

Задача 3. Нека е даден еден природен број $M \geq 3$. За правилниот многуаголник велиме дека е сјајно обоен ако сите негови страни и дијагонали се обоени во точно M бои, така да не постојат три темиња од тој многуаголник кои определуваат триаголник чии страни се обоени точно во две бои.

Нека N е најголемиот природен број таков што постои сјајно обоен правилен многуаголник со точно N темиња.

а) Докажи дека $N \le (M-1)^2$

б) Ако $M-1$ е прост број, докажи дека постои сјајно обоени правилен многуаголник со точно $(M-1)^2$ темиња.

Решение. а) Нека раб е страна или дијагонала на правилниот многуаголник. Да разгледаме произволно теме X_0 на многуаголникот кој е сјајно обоен. Тврдиме дека за секоја боја постојат најмногу $M-2$ рабови кои излегуваат од темето X_0 во таа боја. Навистина, нека претпоставиме дека X_0 е поврзано со темињата $X_1, X_2, ..., X_{M-1}$ рабови со иста боја, на пример C. Нека Y е теме кое е поврзано со темето X_0 со било кој друга боја различна од C. Такво теме постои бидејќи во спротивно сите рабови би биле обоени со бојата C. Темето Y мора да биде поврзано со темињата $X_1, X_2, ..., X_n$ со боја која е различна од бојата C. Бидејќи има вкупно $M-1$ боја различна од C, постојат две темиња X_i и X_j, кои со Y се поврзани со иста боја, што е контрадикција бидејќи тогаш YX_iX_j би имал страни обоени во точно две бои.

Значи, бројот на рабови кои излегува до едно теме од сјајно обоен многуаголник е $N-1 \le M \cdot (M-2)$, од каде следува дека $N \le (M-1)^2$.

б) Нека $n = M-1$ е прост број и нека означиме со (i, j), $i, j \in \{0,1,2,..., p-1\}$, p^2 паровите темиња. Нека боите ги означиме со броевите $0,1,2,..., p$.

Нека работ помеѓу темињата (i_1, j_1) и (i_2, j_2) го обоиме со бојата $k \in \{0,1,..., p-1\}$ ако и само ако $j_1 - j_2 \equiv (i_1 - i_2)k \pmod p$ и во бојата p ако и само ако $i_1 = i_2$.

Бидејќи бројот p е прост број, следува дека боењето е добро дефинирано. Навистина, за различни парови (i_1, j_1) и (i_2, j_2) ако

$$j_1 - j_2 \equiv (i_1 - i_2)k \equiv (i_1 - i_2)l \pmod p$$

за боите k и l, тогаш p го дели $(i_1 - i_2)(k-l)$ и $i_1 \ne i_2$, па следува $k = l$. Ако $i_1 = i_2$, тогаш $j_1 - j_2 \equiv (i_1 - i_2)k = 0 \pmod p$, тогаш $j_1 = j_2$, па не е можно и во тој случај работ помеѓу (i_1, j_1) и (i_2, j_2) да има боја p. Нека (i_1, j_1), (i_2, j_2) и (i_3, j_3) се три темиња така што работ помеѓу (i_1, j_1) и (i_2, j_2) и работ помеѓу (i_2, j_2) и (i_3, j_3) имаат иста боја, на пример k. За $0 \le k \le p-1$, имаме

$j_1 - j_3 = (j_1 - j_2) + (j_2 - j_3) \equiv (i_1 - i_2)k + (i_2 - i_3)k = (i_1 - i_3)k \pmod{p}$,
а за $k = p$, имаме $i_1 = i_2 = i_3$. Во секој случај, работ помеѓу темињата (i_1, j_1) и (i_3, j_3) е исто така обоен во бојата k, па многуаголникот е сјајно обоен.

Задача 4. Нека $N \geq 3$ е непарен природен број. На почетокот во секое поле од табелата $N \times N$ се наоѓа бројот 0. Во секој потег се избираат две полиња кои имаат заедничка страна и потоа двата броја во тие полиња се зголемуваат за 1 или и двата броја се намалуваат за 1. Ако по K потези збировите на броевите во секоја редица и во секоја колона од табелата се еднакви, докажи дека K е парен број.

Решение. Во секој потег збирот на сите броеви се зголемува или се намалува за два, па збирот секогаш е парен. Нека претпоставиме дека по K потези збирот на броевите во секоја редица и во збирот на броевите во секоја колона се меѓусебно еднакви и нека тој број го означиме со S. Збирот на сите броеви тогаш е еднаков на $N \cdot S$. Бидејќи тоа е парен број, а N е непарен број, заклучуваме дека S е парен број.

Да забележиме дека во секој потег се менува парноста на збирот во две соседни редици или две соседни колони. Најпрво нека ги разгледаме само оние потези кои ја менуваат парноста во две соседни колони. Нека A_i е број на потези кои ги менуваат броевите во полињата во i-тата и $(i+1)$-та колона.

Бројот A_1 мора да биде парен бидејќи тоа се еднинствените потези кои ја менуваат парноста на збирот во првата колона. Бројот на потези кои ја менуваат парноста на збирот во другата колона исто така мора да биде парен и изнесува $A_1 + A_2$, па заклучуваме дека A_2 е парен број. Со помош на математичка индукција можеме да заклучиме дека сите броеви A_i се парни, каде $1 \leq i \leq N$.

Вкупниот број на потези кои ја менуваат парноста во две колони е еднаков на $A_1 + A_2 + ... + A_{n-1}$, што е парен број. Аналогно, вкупниот број на потези кои ја менуваат парноста во две редици е парен број. Заклучуваме дека вкупниот број на потези е исто така парен број.

Задача 5. На табела $N \times N$ $(N \geq 2)$, две дијагонално спротивни аголни полиња се обоени црно, а сите други се обоени бело. Во еден чекор избираме редица или колона и ја менуваме бојата на секое поле во тој ред

или колона од црно во бело и обратно. Кој е најмалиот дополнителен број полиња што треба да ги обоиме во црно на почетокот за да можеме, по конечен број на опишани чекори, да добиеме табела на која сите полиња се црни?

Решение. Да забележиме дека редоследот на правење на чекорите не е важен, така што без губење на општоста можеме да претпоставиме дека прво ќе правиме чекори по редици, а потоа по колони. Исто така да забележиме дека нема потреба да правиме еден ист чекор повеќе пати.

Да разгледаме какво мора да биде почетното боење на таблата за да можеме, по конечен број на чекори, да добиеме целосно црна табла. Бидејќи прво ќе правиме чекори по редици, а потоа по колони, можеме да забележиме дека пред правењето на чекори по колони сите редици мораат да бидат обоени на истиот начин. Затоа заклучуваме дека во почетното боење сите редици мораат да бидат обоени на еден од двата можни начини кои можат да се добијат еден од друг преку примена на конечен број на чекори.

Ако секоја редица во почетното боење содржи барем две црни полиња, тогаш бројот на црни полиња е барем $2n$. Претпоставуваме дека постои редица која содржи најмногу едно црно поле. Таа редица не може да биде иста како првата и последната редица бидејќи во нив се наоѓаат црни полиња во различни колони. Ова значи дека постои редица која е обоена спротивно и содржи барем $n-1$ црни полиња. Ако таа редица содржи n црни полиња, тогаш првата и последната редица дополнително содржат n црни полиња и вкупниот број на црни полиња е барем $2n$. Ако таа редица содржи точно $n-1$ црно поле, тогаш во преостанатите $n-1$ редици мора да има барем по едно црно поле, па вкупниот број на црни полиња е барем $2n-2$. Ова значи дека вкупниот број на црни полиња на почетокот мора да биде барем $2n-2$, односно мораме да обоиме барем $2n-4$ дополнителни полиња.

Со други зборови, ако ги обоиме сите полиња освен последното во првата редица и последната колона во црно, тогаш по конечен број на чекори (на првите $n-1$ редици и првите $n-1$ колони), целата табела ќе биде црна. Конечно, најмалиот број на полиња кои треба дополнително да се обојат во црно е $2n-4$.

Задача 6. Дадени се $N \geq 3$ точки во рамнината такви што никои три од нив не лежат на иста права. Секоја отсечка која поврзува две дадени точки е обоена со црвена или со сина боја. Докажи дека постои $N-1$

отсечки со иста боја кои не ја делат рамнината на повеќе од еден дел такви што било кои две од нив не се сечат освен во нивните темиња.

Решение. Условот $N-1$ отсечка да не ја дели рамнината на повеќе од еден дел е еквивалентен со условот да тие отсечки формираат еднобојно стебло (сврзан граф без циклуси) кој е вложен во рамнината и во кој рабовите не се сечат (освен во темињата).

Тврдењето ќе го докажеме со помош на математичка индукција по N. Ако $N=3$, тогаш тврдењето е очигледно бидејќи три точки одредуваат три отсечки и барем две отсечки мора да бидат во иста боја.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за сите природни броеви помали или еднакви од N и нека ја разгледаме конвексната обвивка на множеството кое се состои од $N+1$ точки. Ако постојат две отсечки со различна боја на работ на конвексните обвивки на кои им е заедничко темето A, тогаш од индуктивната претпоставка постои еднобојно стебло од сите точки различни од темето A. Но, темето A е споено со раб со иста боја со едно од темињата во тоа стебло кој не сече ниту еден раб од тоа стебло бидејќи се наоѓа на работ на конвексната обвивка. Со тоа сме добиле еднобојно стебло во кое рабовите не се сечат со N рабови.

Во остатокот од решението можеме да претпоставиме дека сите отсечки (рабови) на работ на конвексната обвивка имаат иста боја. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дкеа сите тие рабови се обоени со црвена боја.

Воведуваме координатен систем така да сите дадени точки (темиња) имаат различни апциси. Нека дадените точки $A_1, A_2, ..., A_{N+1}$ се подредени по апцисата во растечки редослед.

За $K=2,...,N$ од индуктивната претпоставка применета на точките (темињата) $A_1, A_2, ..., A_K$ постои еднобојно стебло L_K во кое рабовите не се сечат, а со примена на индуктивната претпоставка на точките $A_K, A_{K+1}, ..., A_{N+1}$ постои еднобојно стебло R_K. Ако постои K, таков што L_K и R_K се со иста боја, тогаш постои еднобојно стебло од $N+1$ темиња кои се добиваат со унија на L_K и R_K. Затоа, нека претпоставиме дека L_K и R_K се со различна боја за секој K.

Ако е стеблото R_2 со црвена боја, тогаш на тоа стебло можеме да го додадеме работ A_1A_2 со конвексната обвивка и така да го конструираме бараното стебло од N темиња. Затоа претпоставуваме дека R_2 е обоено

со сина боја и аналогно L_N со сина боја. Тогаш L_2 и R_N се обоени со црвена боја.

Бидејќи L_2 е обоено со црвена боја, а L_N е обоено со сина боја, мора да постои K, така што L_K е обоено црвено, а L_{K+1} е обоено со сина боја. Тогаш R_{K+1} е обоено со црвена боја и постои должина $\overline{XY}$ на работ на конвексната обвивка така што X е во стеблото L_K, а Y е во стеблото R_{K+1} (на пример, X и Y можеме да ги избереме како точки во тие стебла со најголема ордината). Унијата на стеблата L_K, R_{K+1} и работ $\overline{XY}$ е обоена со црвена боја и е стебло од $N+1$ темиња на кое рабовите не се сечат (освен во јазлите). Бидејќи во сите случаи дојдовме до бараниот заклучок, доказот е завршен.