– Шпернерова лема – или поглед у свет 2-адичних бројева

др Раде Живаљевић, **Београд**

Свет 2-адичних бројева је потпуно другачији од света тријангулација о коме је била реч у претходном чланку. У овом наставку показаћемо како их на неочекиван и тајанствен начин повезује Шпернерова лема. Наш непосредан циљ је решење следећег, наоко једноставног задатка.

Задатак 1. Квадрат је подељен на троуглове једнаких површина. Доказати да број троуглова у овој подели (тријангулацији) мора бити паран.

Лако се уверавамо да се квадрат може поделити на $2, 4, 6$ и уопште на сваки паран број троуглова једнаке површине. Такође брзо увиђамо да нам таква подела на непаран број троуглова никако не полази за руком. Зашто је то тако!? Искрено речено не знам одговор, али наставимо причу и завиримо у свет 2-адичних бројева који ће нам помоћи да дођемо до решења.

Свет 2-адичних бројева

Увређено је мишљење да су разломци веома трезвена и разумна бића, уосталом отуда (вероватно) и долази њихово име рационални бројеви. Међу разломцима се тачно зна шта је ред, зна се да је $3/2 < 2^5$ и да је $-5\frac{1}{3} < \frac{7}{2}$, зна се ко је позитиван ко је негативан, зна се ко је са ким дељив и од кога се могу очекивати овакви или онакви остаци при дељењу са 9 или са 11. Међу разломцима су посебно угледни природни бројеви, а међу њима се још од времена старих Грка издвајају троугаони, четвороугаони (квадратни), петоугаони, и уопште полигонални бројеви, што наговештава извесну духовну везу ових бројева са полигоналним светом *Равније*.

На опште изненађење, међу разломцима се једнога дана на мистериозан начин проширила чудна мода која је пореметила многе дотадашње јасне и свима очигледне односе. Укратко, сви разломци су као по команди пожелели да што више личе на чланове угледне породице степена двојке $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$, и изненада су дељивост са што већим степеном броја 2 ставили на сам почетак пожељних особина које би требало да има сваки успешан рационалан број. Ово је наравно произвело општу пометњу и препирку међу бројевима. Све се на срећу убрзо разрешило (као што је и ред међу рационалним бићима) и то на следећи начин. На оснивачкој скупштини је усвојена *Оснивачка повеља 2-адичног света* којом су прецизирана нова правила понашања и односи међу разломцима. Најважнија новост био је закон којим је апсолутна вредност $|x|$ рационалног броја x стављена ван снаге и замењена новом, 2-адичном апсолутном вредношћу $|x|_2$.

Познато нам је да се сваки разломак $x = \frac{p}{q}$ може записати као производ $x = \frac{p}{q} = 2^m \cdot \frac{a}{b}$ неког степена двојке 2^m и разломка $\frac{a}{b}$ где су a и b цели бројеви који нису дељиви са 2. На пример $\frac{140}{27} = 2^2 \cdot \frac{35}{27}$, $\frac{-5}{56} = 2^{-3} \cdot \frac{-5}{7}$ итд. Назовимо број $2^m = \{\frac{p}{q}\}_2$, 2-адичним делом разломка $\frac{p}{q}$, нпр. $\{\frac{140}{27}\}_2 = 2^2$, $\{\frac{-5}{56}\}_2 = 2^{-3}$, $\{1\}_2 = 2^0 = 1$. Још важнија је реципрочна вредност $|\frac{p}{q}|_2 = \{\frac{p}{q}\}_2^{-1}$, 2-адичног дела разломка $\frac{p}{q}$ која се и помиње у оснивачком документу 2-адичног света.

Оснивачка повеља 2-адичног света. Сваком рационалном броју $x = \frac{p}{q} = 2^m \cdot \frac{a}{b}$ додељује се величина $|x|_2 := 2^{-m}$ коју називамо 2-адична норма или 2-адична апсолутна вредност рационалног броја x. По дефиницији $|0|_2 = 0$. Величина $|x|_2$ замењује апсолутну вредност $|x|$ у свим изразима у којима се мери растојање, нпр. уместо $|x-y|$ као мера разликовања (удаљености) бројева x и y узима се величина $|x-y|_2$.

Живот у 2-адичном свету

Последице замене уобичајене апсолутне вредности $|x|$ новом 2-нормом $|x|_2$ биле су моменталне и драматичне. Бројеви који су једва и знали један за другог, као на пример уважени трећи степен $3^3 = 27$ и елегантни квадрат $11^2 = 121$, постали су „први суседи“. Заиста, њихова ранија удаљеност $|121 - 27| = 94$, при новом рачунању удаљености, свела се на $|121-27|_2 = |94|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2}$! Бројеви, као нпр. низ $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$, који су се, постајући све већи, удаљавали ка бесконачности, одједанпут су се, постајући све мањи, почели приближавати нули. Бројеви, као нпр. низ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, који су се раније у метрици заданој уобичајеном апсолутном вредношћу приближавали 0, одједанпут су почели „дивље“ да осцилују. Бесконачне суме (редови), као нпр. бесконачни геометријски ред

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + \cdots \tag{1}$$

који се раније нису могли сумирати (њихов збир је био бесконачан!) сада су се лако могли сабрати. Заиста, формула

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n + \cdots = \frac{a_1}{1-q} \tag{2}$$

која важи ако је $|q| < 1$ и сада остаје на снази али под условом $|q|_2 < 1$. Пошто је $|2|_2 = \frac{1}{2} < 1$, закључујемо да је формула (2) примењива на случај геометријског реда (1) као и да је његов збир $\frac{1}{1-2} = -1$!

На свој ужас, становници 2-адичног света установише да је „збир“ бесконачног низа позитивних бројева једнак негативном броју (броју -1)! Наступи велика смутња, пометња и малодушност. „Раније је било боље“, јавише се неки. „Доле са степенима двојке“, придружише им се други. Наступи опште узнемирење и несигурност али поново, као што и приличи рационалним бићима, становници 2-адског света нађоше решење и донесоше:

Први амандман оснивачкој повељи 2-адичног света. Укида се свако позивање на релацију поретка „$<$“, као и апеловање на „позитивност“ или „негативност“ неког рационалног броја. Напушта се линеарни поредак међу бројевима као нешто неприлично и непримерено слободним становницима 2-адичног света.

Хармонија поново завлада 2-адичним универзумом а бројеви-научници пођоше у истраживање свог новог света. Мало по мало појавише се интересантни идентитети и релације (покушајте да проверите неке од њих) међу њима и следећи:

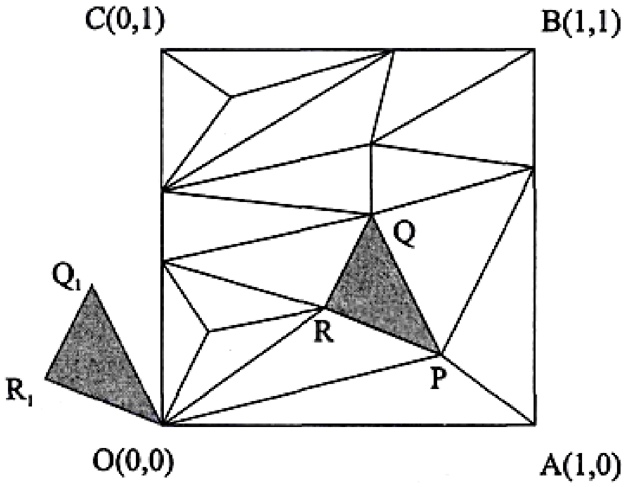
$$\begin{array}{ll} |-x|_2 = |x|_2 & |x \cdot y|_2 = |x|_2 \cdot |y|_2 \\[2ex] |x+y|_2 \leqslant \max\{|x|_2, |y|_2\} & |x+y|_2 = |x|_2 \text{ ако је } |x|_2 > |y|_2. \end{array} \tag{3}$$

Шпернерова лема и 2-адична раван

Све је то лепо и маштовито, рећи ће неки, али каква је стварна веза 2-адичних бројева са Задатком 1 и дељењем квадрата на троуглове једнаких површина. Пођимо од првог, и на први поглед наивног објашњења. Претпоставимо да је квадрат подељен на n троуглова једнаких површина одакле следи да је површина сваког од тих троуглова $P = \frac{1}{n}$. Решићемо задатак ако докажемо да је n обавезно паран број или другим речима ако докажемо да је $|n|_2 < 1$, тј. да је $|P|_2 > 1$. Лепо, али како доказати последњу неједнакост, не дају се скептици? Шта добијамо ако услов парности заменимо мање прегледном неједнакошћу $|P|_2 > 1$? Одговор се крије у неочекиваној примени Шпернерове леме!

Решење задатка (случај рационалних темена). Ставимо квадрат у координатни систем тако да су његова темена тачке са координатама $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, видети слику. Замислимо да је тај квадрат тријангулисан на n троуглова једнаких површина.

Важна допунска претпоставка. Претпоставимо да су координате свих врхова свих троуглова рационални бројеви! Ова претпоставка није неопходна (видети крај чланка) али је врло згодна јер нам омогућује да суштину доказа изложимо на најбржи и најпрегледнији начин.



Имајући у виду Шпернерову лему, свакој тачки $T(x,y)$ у равни са обе рационалне координате, $x, y \in \mathbb{Q}$, доделимо ознаку $\Omega_T = \Omega_{(x,y)} \in \{0,1,2\}$, сагласно следећем правилу

$$\text{(4)} \qquad \Omega_{(x,y)} = \begin{cases} 0 & \text{ако је } |x|_2 < 1 \text{ и } |y|_2 < 1 \\ 1 & \text{ако је } |x|_2 \geqslant 1 \text{ и } |x|_2 \geqslant |y|_2 \\ 2 & \text{ако је } |y|_2 \geqslant 1 \text{ и } |y|_2 > |x|_2. \end{cases}$$

Одавде следи да је увек

$$\Omega_{(x,0)} \in \{0,1\}, \quad \Omega_{(1,y)} \in \{1,2\}, \quad \Omega_{(x,1)} \in \{1,2\}, \quad \Omega_{(x,0)} \in \{0,2\},$$

као и да су ознаке врхова нашег квадрата $\Omega_{(0,0)} = 0, \Omega_{(1,0)} = 1, \Omega_{(1,1)} = 1, \Omega_{(0,1)} = 2$. Закључујемо да се $\overline{01}$-дужи на граници квадрата могу јавити само на x-оси, тј. на његовој страни OA. Поред тога, с обзиром да је $\Omega_O = 0$ и $\Omega_A = 1$, видимо да је број граничних $\overline{01}$-дужи непаран, дакле према критеријуму из претходног чланка о Шпернеровој леми, постоји

$\overline{012}$-троугао у датој тријангулацији. Означимо са P, Q, R темена тог троугла при чему претпостављамо да је $\Omega_P = 0, \Omega_Q = 1, \Omega_R = 2$. Следеће тврђење се лако дедукује из последње од четири релације у (3) и дефиниције означавања (4).

Тврђење. Ознака $\Omega_M = \Omega_{(x,y)}$ било које тачке $M(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ се не мења ако се M транслаторно помери за вектор $\overrightarrow{ON}$ где је O координатни почетак и N тачка чија је ознака нула, $\Omega_N = 0$.

Померимо транслаторно троугао PQR за вектор $-\overrightarrow{OP}$, тј. тако да му теме P пређе у координатни почетак; при томе теме Q прелази у теме $Q_1 = Q_1(x_1, x_2)$ а теме R у теме $R_1 = R_1(y_1, y_2)$ (видети слику). Пошто је $\Omega_P = \Omega_{-P} = 0$, закључујемо да је $\Omega_{Q_1} = 1$ и $\Omega_{R_1} = 2$. Према добро познатој формули, површина P_{PQR} троугла PQR је

$$P = P_{PQR} = P_{OQ_1R_1} = \tfrac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

Одавде је

$$|P|_2 = |\tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)|_2 = |\tfrac{1}{2}|_2 \cdot |x_1y_2 - x_2y_1|_2 = 2|x_1y_2|_2 \geqslant 2 > 1$$

при чему смо поново користили последњу релацију из (3) као и чињеницу да је $|x_1y_2|_2 > |x_2y_1|_2$ која је дедукована из (4) коришћењем једнакости $\Omega_{Q_1} = 1$ и $\Omega_{R_1} = 2$. Дакле, као што је и обећано, $|n|_2 = |1/P|_2 < 1$ одакле следи да је n паран број.

Коментари и информације

Џон Томас (John Thomas, A dissection problem, Math. Mag., 41 (1968) 187-190), први је приметио да се особине 2-адичне норме $|x|_2$, у садејству са Шпернеровом лемом, могу искористити за решење проблема дељења квадрата на троуглове једнаких површина. Наша презентација се базира на Томасовим идејама. Пол Монски (Pol Monsky, On dividing a square into triangles, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 161-164), показао је како се претпоставка о рационалности координата темена троуглова може избећи.

За сваки прост број p се на сличан начин као и у случају $p = 2$ дефинише одговарајућа p-адична норма $|x|_p$ што значи да за сваки прост број p постоји и одговарајући p-адични „свет". Коришћењем p-адичних норми и генералне, d-димензионалне Шпернерове леме (D.G. Mead, Dissection of the hypercube into simplexes, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 76, No. 2 (1979), 302-304), може се доказати да је подела d-димензионалног куба на симплексе једнаких (хипер)волумена могућа ако и само ако је њихов број дељив са $d! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot d$. Специјално за $d = 3$, добија се да се коцка може поделити на тетраедре истих запремина ако и само ако је број ових тетраедара дељив са $3! = 6$.

Ево и неколико занимљивих www-адреса:

http://en.wikipedia.org/wiki/P-adic_number
http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/padicnotes.pdf
http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics7.htm
http://www.p-adic-mathphys2005.phy.bg.ac.yu/
http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/556/

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година