Ристо Малчески,
Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

Во оваа статија ќе го разгледаме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, која има забележителна примена во бројните математички дисциплини. Ова неравенство прв го докажал францускиот математичар Коши во 1821 година, а интегралната аналогија на истото ја докажал рускиот математичар Буњаковски во 1859 година. Да забележиме дека ова неравенство во своите работи го користел и германскиот математичар Шварц, но дури во 1884 година.

Тврдење 1 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, за $i=1,2,...,n$, тогаш

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 , \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} . \tag{2}$$

Доказ. Да го разгледаме квадратниот трином

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

Полиномот $P(t)$ е ненегативен за секој $t \in \mathbf{R}$, па затоа неговата дискриминанта е непозитивна, т.е. точно е неравенството

$$4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le 0 ,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Понатаму, во (1) важи знак за равенство ако и само ако дискриминатата на полиномот $P(t)$ е еднаква на нула, што значи ако и само ако $a_i t - b_i = 0$, за $i=1,2,...,n$, т.е. ако и само ако се исполнети равенствата (2). ♦

Во следните две последици ќе покажеме како со помош на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц може да се докажат некои од добро познатите неравенства меѓу средните.

Дефиниција. Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Броевите

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ , \ (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} , \ \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}} \ \text{и} \ \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска, хармониска и квадратна средина* на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, соодветно.

Последица 1 (неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина). Ако $a_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ , \tag{3}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доказ. Нека $a_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и да земеме $b_i = 1, i=1,2,...,n$. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1^2 \ \Leftrightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$. ♦

Последица 2 (неравенство меѓу аритметичката и хармониската средина). Ако $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ , \tag{4}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Доказ. Земаме $a_i = \sqrt{x_i},\ b_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}},\ i=1,2,...,n$. Со замена во неравенството (1) добиваме

$$(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}})^2 \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}^2} \ \Leftrightarrow$$

$$n^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \ \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\frac{1}{\sqrt{x_1}}} = \frac{\sqrt{x_2}}{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} = ... = \frac{\sqrt{x_n}}{\frac{1}{\sqrt{x_n}}}\ ,$$

т.е. ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$. ♦

Забелешка. Во претходните разгледувања го докажавме неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина на позитивни реални броеви. Меѓутоа, во случајот важна улога има и геометриската средина, односно за позитивни реални броеви $a_i, i=1,2,...,n$ точни се неравенствата

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ge (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \ge \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}},$$

кои ќе ги прифатиме без доказ.

Во претходните разгледувања го докажавме неравеството на Коши-Буњаковски-Шварц и со негова помош докажавме две важни неравенства меѓу аритметичаката, хармониската и квадратната средина. Во натамошните разгледувања ќе ја покажеме примената на овие неравенства.

Пример 1. Нека $x_i, i=1,2,...,n,n+1$ се реални броеви такви што

$$x_1+x_2+...+x_n = x_{n+1}.$$

Докажете дека

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)}\ .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)} &= \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)} \le \sqrt{1^2+1^2+...+1^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_{n+1}-x_i)}\\ &= \sqrt{n[x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^2]} = \sqrt{n[x_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2]}.\end{aligned} \tag{5}$$

Повторно, од условот на задачата и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$x_{n+1}^2 = (\sum_{i=1}^{n} 1\cdot x_i)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ,$$

т.е.

$$-n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le -x_{n+1}^2. \tag{6}$$

Конечно, од условот на задачата и од неравенствата (5) и (6) следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)} &\le \sqrt{nx_{n+1}^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le \sqrt{nx_{n+1}^2 - x_{n+1}^2} = \sqrt{x_{n+1}(nx_{n+1}-x_{n+1})}\\ &= \sqrt{x_{n+1}(nx_{n+1}-\sum_{i=1}^{n} x_i)} = \sqrt{x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 2. Нека $a_1a_2...a_n = 1, a_i > 0, i=1,2,...,n$. Докажете дека

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n} \le a_1+a_2+...+a_n. \tag{7}$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}...\sqrt{a_n}} = 1,$$

т.е.

$$n \leq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n} \ . \tag{8}$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и од неравенството (8) следува

$$(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n})^2 \leq (1^2 + 1^2 + ... + 1^2)(a_1 + a_2 + ... + a_n) = n(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$
$$\leq (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n})(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

Конечно, ако последното неравенство го поделиме со $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n}$ го добиваме неравенството (7). ♦

Пример 3. Докажете дека за секои реални броеви $a_i, i = 1, 2, ..., n$ важи

$$\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2}. \tag{9}$$

Решение. Со последователна примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за броевите

$$x_i = \sqrt{a_i(a_{i+1} + a_{i+2})}, \ y_i = \sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}}, \ i = 1, 2, ..., n \ ,$$

каде $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ и очигледното неравенство $a_i a_j \leq \frac{a_i^2+a_j^2}{2}$ го добиваме неравенството

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$$
$$= [a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + ... + a_n(a_1 + a_2)](\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2})$$
$$\leq (\frac{a_1^2+a_2^2}{2} + \frac{a_1^2+a_3^2}{2} + \frac{a_2^2+a_3^2}{2} + \frac{a_2^2+a_4^2}{2} + ... + \frac{a_n^2+a_1^2}{2} + \frac{a_n^2+a_2^2}{2})(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2})$$
$$= 2(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2}),$$

кое е еквивалентно со неравенството (9). ♦

Пример 4. Нека се x, y, z позитивни броеви такви да $x + y + z = 1$. Докажете дека

$$\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$

Решение. Најпрво да забележиме дека од очигледното неравенство

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

следува неравенството

$$3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \tag{11}$$

Понатаму, применувајќи го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и неравенството (11) добиваме

$$\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} = \sqrt{xy}\sqrt{1-z} + \sqrt{yz}\sqrt{1-x} + \sqrt{zx}\sqrt{1-y}$$

$$\le \sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{(1-z)+(1-x)+(1-y)}$$
$$= \sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 5. Нека $a_i, i=1,2,...,n$ се ненегативни броеви. Докажете, дека неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^4 \qquad (12)$$

е точно за произволни реални броеви $x_i, i=1,2,...,n$ ако и само ако $\sum_{i=1}^{n} a_i \le 1$.

Решение. Нека за произволни реални броеви $x_i, i=1,2,...,n$ е точно неравенството (12). Земаме $x_i=1, i=1,2,...,n$ и добиваме

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

од што следува $\sum_{i=1}^{n} a_i \le 1$.

Обратно, нека $\sum_{i=1}^{n} a_i \le 1$. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2)^2 = (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\sqrt{a_i} x_i^2)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^4 \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^4 \ . \ ♦$$

Пример 6. Нека c е произволен позитивен реален број. Најдете ја онаа пермутација $k_0, k_1, k_2, ..., k_n$ на броевите $0,1,2,...,n$ за која изразот

$$c^{k_0} + c \cdot c^{k_1} + c^2 \cdot c^{k_2} + ... + c^n \cdot c^{k_n} \qquad (13)$$

достигнува максимална вредност.

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски Шварц добиваме

$$1 \cdot c^{k_0} + c \cdot c^{k_1} + c^2 \cdot c^{k_2} + ... + c^n \cdot c^{k_n} \le \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (c^i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (c^{k_i})^2} = \sum_{i=0}^{n} c^{2i}. \quad (14)$$

Според тоа, за која било пермутација $k_0, k_1, k_2, ..., k_n$ изразот (13) не е поголем од $\sum_{i=0}^{n} c^{2i}$. Меѓутоа, во неравенството (14) знак за равенство се достигнува ако и само ако

$$\frac{1}{c^{k_0}} = \frac{c}{c^{k_1}} = \frac{c^2}{c^{k_2}} = ... = \frac{c^n}{c^{k_n}} ,$$

што е можно ако и само ако $k_0=0, k_1=1, k_2=2, ..., k_n=n$. Според тоа, бараната пермутација за која изразот (13) достигнува максимална вредност е идентичната пермутација. ♦

На крајот од нашите разгледувања ќе наведеме неколку задачи за самостојна работа, за чие решавање може да се искористи неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

Задача 1. Ако $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, за $i = 1, 2, ..., n$, тогаш

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} .$$

Докажете!

Задача 2. Нека се a, b, c должини на страни на триаголник. Докажете го неравенството

$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \ge 0 .$$

Упатство. Земете

$$s = \tfrac{a+b+c}{2},\ x = s-a,\ y = s-b,\ z = s-c,\ a = y+z, b = z+x,\ c = x+y ,$$

трансформирајте го почетното неравенство и искористете го неравеството на Коши-Буњаковски-Шварц.

Задача 3. Докажете дека за страните a, b, c и тежишните линии m_a, m_b, m_c на произволен триаголник важи

$$am_a + bm_b + cm_c \le \tfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2) .$$

Упатство. Искористете го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и познатото равенство

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \tfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) .$$

Литература

1. Govedarica, V.: *Matematička takmičenja u Republici Srpskoj,* ZUNS, Sarajevo, 2007
2. Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
3. Mitrinović, D. S.; Vasić, P. M.: *Analitičke nejednakosti,* Građevinska knjiga, Beograd, 1970

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ