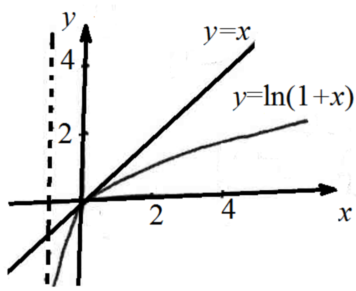
Алија Муминагиќ
Данска

ЕДНА НИЗА РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ КОЈА КОНВЕРГИРА КОН БРОЈОТ $\sqrt{2}$

Во литературирата се познати повеќе низи рационални броеви кои конвергираат кон бројот $\sqrt{2}$. Јасно, членовите на овие низи се рационални приближувања на ирационалниот број $\sqrt{2}$. Во оваа статија ќе разгледаме една таква низа рационални броеви. За таа цел прво ќе забележиме дека за секој $x>-1$ важи

$$\ln(1+x)\le x, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи само за $x=0$. Последното неравенство не е тешко да се докаже, а точноста на истото ја потврдуваат и графиците на функциите $y=x$ и $y=\ln(1+x),\ x>-1$ (цртеж десно).



Пред да ја конструираме бараната низа рационални броеви ќе докажеме тврдење кое ни е потребно.

Задача 1. Докажи дека

$$a_n=\frac{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}}{\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}}\to 1,\text{ кога } n\to\infty.$$

Решение. Ако искористиме дека за секој $k\in\mathbb{N}$ важи

$$\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}=1+\frac{1}{k(k+2)}$$

добиваме

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}}{\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}}\\&=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\cdot\frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+4)}\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+4)(n+6)}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n+1)^2}{2n(2n-2)}\\&=(1+\frac{1}{n(n+2)})(1+\frac{1}{(n+2)(n+4)})\cdot(1+\frac{1}{(n+4)(n+6)})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2n(2n-2)}).\end{aligned}$$

Последното равенство го логаритмираме и ако го искористиме неравенството (1) добиваме:

$$
\begin{aligned}
\ln a_n &= \ln(1+\tfrac{1}{n(n+2)}) + \ln(1+\tfrac{1}{(n+2)(n+4)}) + \ln(1+\tfrac{1}{(n+4)(n+6)}) + \ldots + (1+\tfrac{1}{2n(2n-2)}) \\
&< \tfrac{1}{n(n+2)} + \tfrac{1}{(n+2)(n+4)} + \tfrac{1}{(n+4)(n+6)} + \ldots + \tfrac{1}{2n(2n-2)} \\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+2}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n+2} - \tfrac{1}{n+4}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n+4} - \tfrac{1}{n+6}) + \ldots + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2n-2} - \tfrac{1}{2n}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{4n}.
\end{aligned}
$$

Понатаму, $a_n > 1$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и од последното неравенство и својствата на логаритамската функција следува дека

$$0 < \ln a_n < \tfrac{1}{4n}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Но, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0$, па од теоремата за три низи и од неравенствата (2) следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = 0$, што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 2. Докажи дека

$$\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \to \sqrt{2}, \text{ кога } n \to \infty.$$

Решение. Нека $b_n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}, n \in \mathbb{N}$. Имаме

$$
\begin{aligned}
2 = \frac{2n}{2} &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+5}{n+4} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n}{2n-1} \\
&= (\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1})(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+5}{n+4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}) \\
&= (\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1})^2 \frac{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+5}{n+4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}}{\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}} \\
&= b_n^2 \cdot a_n.
\end{aligned}
$$

т.е.

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}}, \tag{3}$$

за секој $n \in \mathbb{N}$. Сега, ако во (3) земеме $n \to \infty$, тогаш од задача 1 следува

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = \sqrt{2},$$

што и требаше да се докаже. ■

Ако ја искористиме низата b_n, $n \in \mathbb{N}$, тогаш едноставно можеме да најдеме рационални броеви кои се приближно вредности на бројот $\sqrt{2}$. Меѓутоа, конвергенцијата на оваа низа е спора, па така за $n = 10$ добиваме

$$\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\approx 1,396696183073892\,,$$

а за $n=20$ добиваме

$$\frac{22}{21}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{26}{25}\cdot\frac{28}{27}\cdot\frac{30}{29}\cdot\frac{32}{31}\cdot\frac{34}{33}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{38}{37}\cdot\frac{40}{39}\approx 1,405408675244725\,,$$

додека со точност до 14-тата децимала имаме

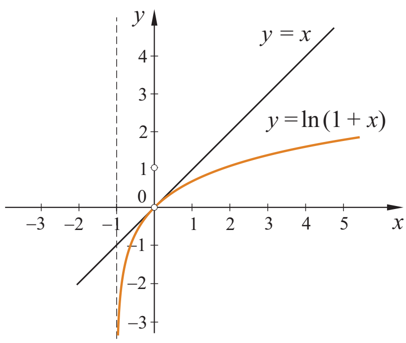
$$\sqrt{2}\approx 1,414213562373095\,.$$

Литература

1. Sam Vandervelde: Fun Wirh FWANADS, Math Horizons, February, 2013, Mathematical Association of America

Jedan niz racionalnih brojeva koji konvergira prema $\sqrt{2}$

Alija Muminagić



U literaturi su poznati neki nizovi racionalnih brojeva koji konvergiraju prema $\sqrt{2}$. Naravno, članovi ovog niza su racionalne aproksimacije iracionalnog broja $\sqrt{2}$. Ovdje ćemo promatrati jedan takav niz racionalnih brojeva. Primijetimo da za svaki relan broj $x > -1$ vrijedi nejednakost

$$\ln(1+x) \le x, \tag{1}$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi samo ako je $x = 0$. Ova nejednakost se lako dokaže, a što možemo ilustrirati na slici gdje su prikazani pravac $y = x$ i krivulja $y = \ln(1+x)$, $x > -1$.

Konstruirajmo članove niza racionalnih brojeva koji imaju traženo svojstvo.

Zadatak 1. Dokažite da vrijedi

$$a_n = \frac{\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+3}{n+2}\cdot\dfrac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n-2}}{\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{n+4}{n+3}\cdot\dfrac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}} \to 1 \quad \text{kada} \quad n\to\infty.$$

Rješenje. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{k(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{k(k+2)} = 1 + \frac{1}{k(k+2)},$$

odakle je

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+3}{n+2}\cdot\dfrac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n-2}}{\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{n+4}{n+3}\cdot\dfrac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}}\\
&= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\cdot\frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+4)}\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+4)(n+6)}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{2n(2n-2)}\\
&= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right)\left(1+\frac{1}{(n+4)(n+6)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n(2n-2)}\right).
\end{aligned}$$

Logaritmirajmo ovu jednakost i iskoristimo nejednakost (1). Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\ln a_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{(n+4)(n+6)}\right)\\
&\quad + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2n(2n-2)}\right)\\
&< \frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+6)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n-2)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+6}\right)$$
$$+ \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{4n}.$$

Prema tome $a_n > 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i iz posljednje nejednakosti i svojstva (1) logaritamske funkcije imamo

$$0 < \ln a_n < \frac{1}{4n}; \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

No, kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0$ iz (2) slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = 0$, što znači $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Dokaži da $\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1} \to \sqrt{2}$, kada $n \to \infty$.

Rješenje. Neka je $b_n = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$2 = \frac{2n}{n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n}{2n-1}$$
$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\right)$$
$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)^2 \frac{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}}{\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}}$$
$$= b_n^2 \cdot a_n,$$

$$\text{tj.} \qquad b_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} \tag{3}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz (3) za $n \to \infty$ iz zadatka 1 dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Ako iskoristimo niz b_n, možemo naći racionalne brojeve koji se približavaju broju $\sqrt{2}$. Međutim, konvergencija ovog niza je spora. Tako za $n = 10$ imamo

$$\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19} \approx 1.369696183073892$$

a za $n = 20$ je $\frac{22}{21}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{26}{25}\cdot\frac{28}{27}\cdot\frac{30}{29}\cdot\frac{32}{31}\cdot\frac{34}{33}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{38}{37}\cdot\frac{40}{39} \approx 1.405408675244725$, dok je točna vrijednost na 15 decimala jednaka $\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$.

Literatura

[1] Sam Vandervelde, *Fun Wirth FWANADS*, Math Horizons, February 2013, Mathematical Association of America.