Републички натпревар 1992

I година

1. Петар и Тошо дошле на гости кај Мишо во градот A. По извесно време решиле да се вратат во својот град B и за таа цел го организирале превозот на следниот начин: Тошо возел со велосипед од градот A до градот B. Мишо извесно време го возел Петар кон градот B со мотор и потоа го оставил да продолжи пеш, а самиот веднаш почнал да се враќа кон својот град A. Сите пошле од градот A истовремено и стигнале во своите градови истовремено. Ако Петар оди пеш со 6 km/h, а Тошо вози велосипед со 22 km/h, со колкава брзина Мишо го возел моторот?

Решение. Да го означиме со s растојанието од A до B и со t времето што им било потребно да стигнат до своите одредишта. Брзините на моторот, велосипедот и пешачењето, т.е. на Мишо, Тошо и Петар да ги означиме со v_M, v_T и $v_П$ соодветно. Тошо цело време вози со велосипед од A до B, па значи,

$$v_T \cdot t = s. \qquad (1)$$

Мишо за времето t извесно време возел кон B и потоа веднаш се вратил кон својот град A. Значи, тој половина од времето од времето возел кон B, а во втората половина се враќал кон A. Ова значи дека Петар половина од времето се возел на мотор со Мишо, а во втората половина од времето продолжил пеш кон B. Бидејќи Петар изминал пат s може да се запише

$$v_M \frac{t}{2} + v_П \frac{t}{2} = s \qquad (2)$$

десните страни на (1) и (2) се еднакви., па, значи

$$v_T \cdot t = v_M \frac{t}{2} + v_П \frac{t}{2},$$

од каде што добиваме $v_M = 38$.

2. Да се определат пет природни броеви a,b,c,d,e(поголеми од 0), така што

$$a+b+c+d+e=100, \qquad \text{NZS}(a,b,c,d,e)=1992.$$

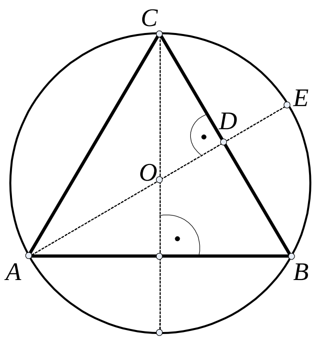
При тоа да не се земаат во предвид решенијата што се добиваат од друго решение со разместување на броевите.

Решение. Имаме $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, па значи мора барем еден од броевите a,b,c,d да е делив со 83, затоа што во спротивно 83 не би се јавил како прост множител во нивниот НЗС. Ако два од броевите се деливи со 83, тогаш тие даваат збир поголем за 100 што не е можно. Значи, точно еден од броевите a,b,c,d,e е делив со 83. Да ставиме $a = 83k$. k мора да е единица, затоа што во спротивно $a > 100$ што не е можно. Значи, $a = 83$. Од $b+c+d+e=17$ и $\text{НЗС}(83, a, b, c.d.e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ следува дека барем еден од броевите b,c,d,e е делив со $2^3 = 8$ затоа што во спротивен случај 2 би се јавил во НЗС$(83, a, b, c, d, e)$ на понизок степен или воопшто не би се јавил. Ако два од броевите b, c, d, e се деливи со 8, тогаш нивниот збир со a е поголем или еднаков на 99, па за преостанатите два броја би имале дека имаат збир 1 што не е можно. Значи, точно еден од броевите b, c, d, e е делив со 8. Да ставиме $b = 8m$. Но m мора да е единица, затоа што во спротивно $a + b \geq 99$, т.е. $c + d + e \leq 1$ што не е можно. Значи, $b = 8$. Од $c + d + e = 9$ и НЗС$(83, 8, b, c, d, e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, следува дека барем еден од броевите c, d и e мора да е делив со 3, затоа што во спротивно 3 не би се јавил како множител во НЗС$(83, 8, b, c, d, e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$. Да ставиме $c = 3n$. Ако $c = 3$, тогаш $d + e = 6$ и d, e имаат како можни делители само 1, 2, 3 и 4; оттука се добиваат две решенија $d = e = 3$ и $d = 4, e = 2$. Ако $c = 6$, тогаш $d + e = 3$ и d, e имаат како можни делители 1, 2, 3 и 4 од кое што се добива решението $d = 2, e = 1$. Ако $c \geq 9$, тогаш $d + e \leq 0$ што не е можно. Значи, има три решенија и тоа

$$a = 83; \quad b = 8; \quad c = 3; \quad d = 3; \quad e = 3$$
$$a = 83; \quad b = 8; \quad c = 3; \quad d = 4; \quad e = 2$$
$$a = 83; \quad b = 8; \quad c = 6; \quad d = 2; \quad e = 1$$

3. Да се докаже дека точките што се симетрични на ортоцентарот на триаголникот во однос на страните на триаголникот лежат на кружницата опишана околу триаголникот.

Решение. Доволно е да докажеме дека ова својство важи за една точка. Го набљудуваме триаголникот ABC околу кој е опишана кружницата. Имаме $\measuredangle ABC = \measuredangle DEC$ (како периферискi агли над ист кружен лак) и $\measuredangle COD = \measuredangle ABC$ (како агли со заемно нормални краци). Добиваме дека триаголниците ODC и EDC се складни, па $\overline{OD} = \overline{DE}$. Според тоа, E е симетрична точка на O во однос на страната BC.



4. На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале 10 шахисти и притоа секој играл со секого. Нека a_i и b_i го означува бројот на победи и бројот на порази соодветно на i-тиот шахист. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = \sum_{i=1}^{10} b_i^2 .$$

Решение. На секоја победа одговара еден пораз и обратно. Затоа $\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=1}^{10} b_i$. Освен тоа јасно е дека $a_i + b_i = 9$ за секој $1 \le i \le 10$. Оттука добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2 - \sum_{i=1}^{10} b_i^2 = \sum_{i=1}^{10} (a_i^2 - b_i^2) = \sum_{i=1}^{10} (a_i - b_i)(a_i + b_i)$$
$$= 9\sum_{i=1}^{10} (a_i - b_i) = 9(\sum_{i=1}^{10} a_i - \sum_{i=1}^{10} b_i) = 9 \cdot 0 = 0$$

II година

1. Ако $|a|=1$ или $|b|=1$, тогаш $|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}|=1$. Докажи!

Решение. Нека $|a|=1$; тогаш

$$|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}| = |\frac{a-b}{|a|^2-\bar{a}b}| = |\frac{a-b}{\bar{a}(a-b)}| = \frac{1}{|\bar{a}|} = 1.$$

2. Да се најдат сите решенија на системот од 3 равенки со 3 непознати x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1|x_1| - (x_1-a)|x_1-a| = x_2|x_2| \\ x_2|x_2| - (x_2-a)|x_2-a| = x_3|x_3| \\ x_3|x_3| - (x_3-a)|x_3-a| = x_1|x_1| \end{cases}$$

каде што a е даден реален број.

Решение. Да забележиме дека ако $(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$ е решение на системот со параметар a, $(-x_1^\circ, -x_2^\circ, -x_3^\circ)$ ќе биде решение со параметар $-a$. Затоа, доволно е да се разгледа само случајот кога $a \ge 0$.

Нека (x_1, x_2, x_3) е решение за кое $x_1 \le a, x_2 \le a, x_3 \le a$; тогаш

$$|x_i - a| = -(x_i - a)$$

и ако ги собереме равенките добиваме

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + (x_3 - a)^2 = 0,$$

од каде следува дека $x_1 = x_2 = x_3 = a$ е единствено решение.

Нека (x_1, x_2, x_3) е решение за кое $x_i \ge a$ за некој i. Тогаш од i-тата равенка добиваме

$$x_{i+1}|x_{i+1}| = x_i^2 - (x_i - a)^2 = a(2x_i - a) \ge a^2.$$

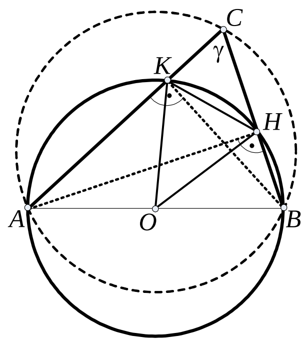
Значи, $x_i \ge a$. За $i = 3$ да замениме $i+1$ со 1; тогаш добиваме $x_1 \ge a, x_2 \ge a,$ $x_3 \ge a$, па собирајќи ги равенките добиваме

$$x_1 = x_2 = x_3 = a,$$

па според тоа, единствено решение е $x_1 = x_2 = x_3 = a$.

3. Ако темињата A и B на триаголникот ABC се фиксни, а темето C се движи така што аголот $\measuredangle ACB$ останува константен, тогаш должината на отсечката што ги спојува подножјата H и K на висините на триаголникот повлечени од темињата A и B соодветно е константа. Докажи!

Решение. Бидејќи аглите $\measuredangle AKB$ и $\measuredangle AHB$ се прави, точките H и K лежат на кружницата со дијаметар AB. Триаголникот ACH е правоаголен, од каде следува дека $\measuredangle CAH = \frac{\pi}{2} - \gamma$, каде што γ е означен аголот ACB. Централниот агол кој одговара на тетивата HK е еднаков на $\pi - 2\gamma$ (Зошто?).



При движењето на C точките H и K се поместуваат по споменатата кружница. Бидејќи централниот агол што одговара на тетивата HK е константен, следува дека должината KH е константна.

4. Шаховска табла со димензија 6×6 е покриена со 18 плочки со димензија 2×1 (секоја плочка покрива два квадрати). Да се покаже дека при секое такво покривање таблата може да се подели на два дела по хоризонтала или вертикала, при што не е пресечена ниедна од плочките 2×1.

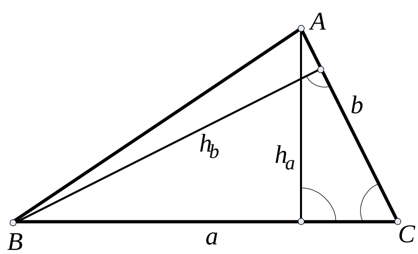
Решение. Да го претпоставиме обратното, т.е. плочките се така поставени што секоја од хоризонталите и секоја од вертикалите дели барем едно поле на два дела.

Имаме 10 такви линии. Секоја од тие линии ја дели таблата на два дела, составена од парен број на полиња. Целите плочки 2×1 покриваат парен број полиња, па затоа од поделените полиња имаме парен број, т.е. најмалку две 2×1 плочки се пресечени од хоризонтала или вертикала.

Ако се има предвид дека секоја 2×1 плочка може да е пресечена само од една хоризонтала (вертикала), тогаш добиваме дека бројот на пресечени плочки е $10 \cdot 2 = 20$. Противречност, бидејќи такви плочки имаме 18.

III година

1. Во еден триаголник дадени се две страни a и b ($a \geq b$). Да се најде третата страна ако е познато дека $a + h_a \geq b + h_b$ каде што h_a и h_b се висините спуштени на a и b соодветно.



Решение. Нека γ е аголот меѓу страните a и b; тогаш имаме

$$a+b\sin\gamma\le b+a\sin\gamma$$
$$(a-b)\sin\gamma\ge(a-b)$$
$$(a-b)(\sin\gamma-1)\ge 0$$
$$\sin\gamma-1\ge 0,$$

од каде што добиваме $\gamma=90^\circ$, т.е. $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Да се докаже дека за кои било $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ од $[0,1]$ е точно неравенството

$$(x_1+x_2+x_3+...+x_n)^2\ge 4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2)$$

Решение. Од $x\in[0,1]$ следува дека $x_i^2\le x_i$. Нека $S=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Од $(S-1)^2\ge 0$, имаме $(S+1)^2\ge 4S$, односно

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i+1)^2\ge 4\sum_{i=1}^{n}x_i\ge 4\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

3. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_\circ.$$

Ако

$$P(a)=1991,\ P(b)=1992 \text{ и } P(c)=1993 \text{ и } a,b,c\in\mathbb{Z},$$

тогаш a,b,c се последователни броеви.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}1&=1992-1991=P(b)-P(a)\\ &=a_n(b^n-a^n)+a_{n-1}(b^{n-1}-a^{n-1})+...+a_2(b^2-a^2)+a_1(b-a).\end{aligned}$$

Десната страна е делива со $b-a$, па според тоа и левата страна е делива со $b-a$, т.е. $b-a$ е делив со 1. Понатаму

$$\begin{aligned}1&=1993-1992=P(c)-P(b)\\ &=a_n(c^n-b^n)+a_{n-1}(c^{n-1}-b^{n-1})+...+a_2(c^2-b^2)+a_1(c-b).\end{aligned}$$

Десната страна е делива со $c-b$, па, значи, и левата страна е делива со $c-b$, т.е. $c-b$ е делител на 1; следствено можни се следниве четири случаи:

1° $b-a=1,\quad c-b=1;$ $\qquad$ 2° $b-a=-1,\quad c-b=-1$

3° $b-a=1,\quad c-b=-1;$ $\qquad$ 4° $b-a=-1,\quad c-b=1.$

Во првиот случај добиваме $a=b-1,\ c=b+1$, а во вториот случај $a=b+1$, $c=b-1$. Во третиот и четвртиот случај добиваме $a=c$ што не е можно, зошто $P(a)\ne P(c)$.

Од сето тоа следува дека a,b,c (или c,b,a) се последователни цели броеви.

4. На една 3×3 квадратна табла се поставени три црвени и три жолти жетони, а две полиња се празни како што е тоа прикажано на левиот цртеж. Секој жетон може да се помести за едно поле по хоризонтали или вертикала ако соседното поле е празно. Дали е можно после 1992 потези на таблата да се добие позиција како на десниот цртеж?

Ц	/	Ж
Ж	Ж	Ц
Ж	Ц	/

Ц	Ж	/
Ж	Ц	Ж
/	Ж	Ц

Решение. Да ги означиме сите девет полиња со a_{ij} $(i,j\in\{1,2,3\})$ како на дадениот цртеж. Нека по n-тиот потез празните места се a_{ij} и a_{kl}. Го разгледуваме збирот

$$S(n)=i+j+k+l\,.$$

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

За секој природен број n важи $|S(n)-S(n-1)|=1$, па $S(n)$ и $S(n-1)$ се броеви со различна парност. Ако одговорот на задачата е позитивен, тогаш треба броевите $S(0)$ и $S(1992)$ да имаат иста парност. Но ова не важи зошто $S(0)=1+2+3+3=9$ и $S(1992)=1+3+3+1=8$ имаат различна праност.

Значи, одговорот на задачата е „не“.

IV година

1. Иста како задача 1 од трета година.

2. Множеството природни броеви е разбиено на конечен број на артитметички прогресии. Да се докаже дека постои артитметичка прогресија во која првиот член е делив со разликата.

Решение. Со $d_1,d_2,...,d_n$ да ги означиме разликите на аритметичките прогресии со кои е разбиено множеството од природните броеви. Тогаш $d_1\cdot d_2\cdot ...\cdot d_n$ е природен број, па е член на некоја аритметичка прогресија, т.е. постои некој $i\in\{1,2,3,...,n\}$, така што

$$d_1\cdot d_2\cdot ...\cdot d_n=a_{i_1}+pd_i\,,$$

каде што a_{i_1} е првиот член, а d_i е разликата на таа прогресија. Значи d_i е делител(фацтор) на a_{i_1}.

3. Иста како задача 3 од трета година.

4. Секоја страна на рамностран триаголник ја делиме на k еднакви дела. Низ точките на страните повлекуваме прави паралелни на страните на триаголникот. Повлекуваме искршена линија низ триаголникот, при што:

а) Ниеден триаголник не се јавува два пати;

б) Секој нареден триаголник на искршената линија има заедничка страна со претходниот.

Низ колку триаголници минува искршената линија?

Решение. Да забележиме дека триаголникот е разбиен на k^2 мали триаголници. Да го обоиме триаголникот со две бои. Притоа црни триаголници има k повеќе од бели. Бројот на белите триаголници е $\frac{k(k-1)}{2}$, а на црните е $\frac{k(k+1)}{2}$. Два триаголници со иста боја не се допираат.затоа, при поминувањето на искршената линија се менува бојата на триаголникот. Ако тргнеме од триаголникот со црна боја, тогаш можеме да ги опфатиме сите бели триаголници, т.е. $\frac{k(k-1)}{2}$ и уште $\frac{k(k-1)}{2}+1$ црни триаголници. Значи, сите опфатени триаголници се:

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+1=k^2-k+1.$$