## LVIII олимпијада

1. За даден природен број $a_0 > 1$ дефинираме низа $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ таква што за секој $n \geq 0$ важи

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цел број,} \\ a_n + 3, & \text{во спротивно.} \end{cases}$$

Определи ги сите вредности на $a_0$ за кои постои број $A$ таков што $a_n = A$ за бесконечно многу вредности на $n$.

**Решение.** *Одговор*: сите природни броеви деливи со 3.

1) Ако за некој $m$ важи $a_m \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш $a_m$ не е точен квадрат и затоа $a_{m+1} = a_m + 3$. Со индукција следува дека $a_{m+i} = a_m + 3i$, за секој $i \geq 0$, што значи дека низата строго монотоно расте, па затоа не е периодична.
2) Ако $a_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш сите членови на низата се деливи со 3. Нека најмалиот член на низата е $a_m = 3k$. Ако $k \geq 2$, тогаш

$$(3k-3)^2 - 3k = 9k^2 - 21k + 9 > 0,$$

па затоа првиот следен квадрат не е поголем од $(3k-3)^2$. Тоа значи дека $a_n \leq 3k - 3$ за некој $n \in \mathbb{N}$, што е противречност. Според тоа, најмалиот член на низата е 3, па затоа во низата понатаму периодично се повторуваат членовите 3, 6, 9, ...
3) Нека $a_0 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ и нека $a_m$ е најмалиот член на низата. Јасно, $3 \nmid a_m$. Да претпоставиме дека $a_m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, т.е. $a_m = 3k + 1$. За $k > 0$ важи

$$(3k-1)^2 - (3k+1) = 9k^2 - 9k \geq 0,$$

па затоа првиот следен квадрат не е поголем од $(3k-1)^2$. Тоа значи дека $a_n \leq 3k - 1$ за некој $n \in \mathbb{N}$, што е противречност. Значи, мора да важи $a_m \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, па затоа од 1) следува дека низата не е периодична.

2. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви $x$ и $y$ важи

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy). \qquad (*)$$

**Решение.** *Одговор*: $f(x) = k(x-1)$, за $k \in \{-1, 0, 1\}$.

*Прв начин*. Ако во (*) ставиме $x = y = 0$ добиваме $f(f(0)^2) = 0$. Од друга страна, ако $f(a) = 0$ за некој $a \neq 1$, тогаш за $x = a$ и $y = \frac{a}{a-1}$ важи $xy = x + y$ и со замена во (*) добиваме

$$f(0) = f(f(a) f(\tfrac{a}{a-1})) = 0.$$

Сега, ако во (*) ставиме $y=0$ добиваме $f(x)=0$ за секој $x\in\mathbb{R}$ и тоа е едно решение на (*).
Понатаму, ќе сметаме дека $f\not\equiv 0$, па од претходните разгледувања ќе следува дека

$$f(a)=0 \text{ ако и само ако } a=1.$$

Од $f(f(0)^2)=0$ следува $f(0)^2=1$. Да забележиме дека ако функцијата $f$ е решение на (*), тогаш и функцијата $-f$ е решение на (*). Затоа можеме да сметаме дека $f(0)=-1$. Во (*) ставаме $y=1$ и добиваме $f(x+1)=f(x)+1$. Сега, со индукција се докажува дека

$$f(x+n)=f(x)+n, \text{ за секој } n\in\mathbb{Z}.$$

Ќе докажеме дека фукцијата $f$ е инјекција. Нека $f(a)=f(b)$. Тогаш

$$f(a+n+1)=f(b+n)+1, \text{ за секој } n\in\mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Земаме $n<-b$. Тогаш $(a+n+1)^2-4(b+n)>0$, па затоа постојат реални броеви $x$ и $y$ такви што

$$x+y=a+n+1 \text{ и } xy=b+n.$$

Понатаму, од (*) и (1) следува

$$f(f(x)f(y))=f(b+n)-f(a+n+1)=-1,$$

а оттука $f(f(x)f(y)+1)=0$. Сега, $f(x)f(y)+1=1$, односно $f(x)=0$ или $f(y)=0$, што значи $x=1$ или $y=1$. Но, во тој случај важи $xy=x+y-1$, односно $a=b$.
Конечно, ако во (*) ставиме $x+y=n\in\mathbb{Z}$ добиваме

$$f(f(x)f(n-x))=f(nx-x^2)-f(n)=f(nx-x^2-n+1)=f((x-1)(n-x-1)),$$

па од инјективноста на функцијата следува

$$f(x)f(n-x)=(x-1)(n-x-1). \qquad (2)$$

Сега, ако во (2) ставиме $n=0$ и $n=1$ добиваме

$$f(x)f(-x)=-x^2+1 \text{ и } f(x)f(-x)-f(x)=-x^2+1-(x-1),$$

од каде следува $f(x)=x-1$. Оваа функција е решение на (*).
*Втор начин.* Ако $f\not\equiv 0$, како во првиот начин на решавање се покажува дека $f(1)=0$, $f(x)\neq 0$ за $x\neq 1$, па без ограничување наопштоста $f(0)=-1$ и $f(x+1)=f(x)+1$. Исто така од $f(f(x)f(\frac{x}{x-1}))=0$ следува $\frac{1}{f(x)}=f(\frac{x}{x-1})$.
Ќе докажеме дека множеството $A=f(\mathbb{R})$ е затворено во однос на собирањето, одземањето и множењето. Знаеме дека $a\in A\Rightarrow\frac{1}{a}\in A$. Нека $a,b\in A$, $a=f(u), b=f(v)$. За некој $n\in\mathbb{Z}$ системот $x+y=n+u, xy=n+v$ има реални решенија, и тогаш

$$b-a=f(v)-f(u)=f(v+n)-f(u+n)=f(f(x)f(y))\in A\,.$$

Понатаму, $0-a=-a\in A \;\Rightarrow\; a+b=b-(-a)\in A$. Сега $\frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}\in A$, па затоа $\frac{x^2-1}{4}\in A$ за секој $x\in A$ и оттука $ab=\frac{(a+b)^2-1}{4}-\frac{(a-b)^2-1}{4}\in A$.

Ако во (*) ставиме $y=0$ добиваме $f(f(x))=f(x)-1$, па затоа $f(t)=t-1$ за секој $t\in A$. Но, $f(x)f(y)\in A$, па затоа $f(xy)-f(x+y)=f(x)f(y)-1$. Ако земниме $g(t)=f(t)-1$ добиваме

$$g(xy)-g(x+y)=g(x)g(y)-g(x)-g(y)\,. \tag{3}$$

Оттука за $y=-1$ (бидејќи $g(-1)=-1$) добиваме $g(-x)=-g(x)$. Понатаму, ако во (3) $x$ и $y$ ги замениме со $-x$ и $-y$ добиваме

$$g(xy)+g(x+y)=g(x)g(y)+g(x)+g(y)\,,$$

Што заедно со (3) дава

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \text{ и } g(xy)=g(x)g(y)\,.$$

Оттука следува $g(x)=x$ и $f(x)=x-1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

3. Ловец и невидлив зајак играат игра во рамнината. Почетните точки во рамнината на зајакот и ловецот, соодветно означени со $A_0$ и $B_0$, се исти. По $n-1$ кругови играње, зајакот е во точката $A_{n-1}$, а ловецот е во точката $B_{n-1}$. Во $n-$тиот круг редоследно се случуваат следниве настани:

*i)* Зајакот незабележливо се поместува во точка $A_n$ која е на растојание 1 од точката $A_{n-1}$,

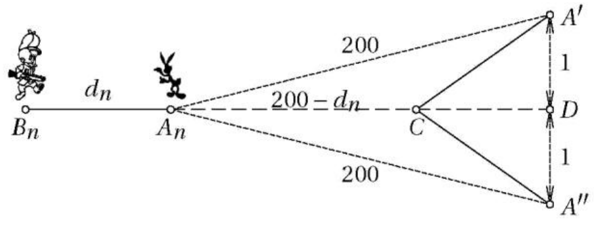
*ii)* Ловецот на радар отчитува точка $P_n$. Единствено што гарантира радарот е дека растојанието меѓу точките $P_n$ и $A_n$ е најмногу 1.

*iii)* Ловецот се поместува во точка $B_n$ на растојание точно 1 од точката $B_{n-1}$, што зајакот го гледа.

Дали ловецот секогаш, без разлика како ќе се движи зајакот и какви се извештаите на радарот, може да се движи така што ќе обезбеди по $10^9$ кругови растојанието меѓу него и зајакот да биде најмногу 100?

**Решение.** *Одговор*: НЕ, сигналите на радарот може да бидат такви што ловецот не може да ја има саканата стратегија.

Со $d_n=\overline{A_nB_n}$ да го означиме растојанието меѓу зајакот и ловецот по $n$ чекори. Ако $d_n\le 100$, ќе докажеме дека со помош на ра-



дарот и малку среќа зајакот во 200 чекори може да го зголеми квадратот на растојанието од ловецот за $\frac{1}{2}$.

Да ги разгледаме точката $C$ на полуправата $B_nA_n$ таква што $\overline{B_nC}=200$ и точките $A'$ и $A''$ на растојание 1 од правата $B_nA_n$ и растојание 200 од точката $A_n$ (каде $\measuredangle B_nA_nA'=\measuredangle B_nA_nA''>90^\circ$). Зајакот може да ја избере една од точките $A'$ и $A''$ и да направи 200 скокови кон неа. Меѓутоа, бидејќи за тоа време неговото растојание од правата $B_nA_n$ нема да е поголемо од 1, можно е сите сигнали $P_n, P_{n+1}, ..., P_{n+200}$ да се на правата $B_nA_n$. Така, ловецот по 200 чекори стигнува во точката $B=B_{n+200}$ за која важи $\overline{B_nB}\le 200$, при што нема начин да знае дали зајакот стигнал до точката $A'$ или $A''$. Бидејќи

$$\max\{\overline{BA'},\overline{BA''}\}\ge\overline{CA'}$$

ниту една стратегија не му гарантира на ловецот растојание помало од $\overline{CA'}$. Со други зборови оптималната стратегија на ловецот е да оди право кон точката $C$. Меѓутоа, ако $D$ е подножјето на нормалата од $A'$ на правата $A_nB_n$, тогаш лесно се добива

$$\overline{CA'}^2=\overline{CD}^2+1=(d_n-x)^2+1=x^2+1+d_n^2-2d_nx,$$

каде $x=200-\sqrt{200^2-1}$. Од $x>\frac{1}{400}$ и $x^2+1=400x$ следува

$$\overline{CA'}^2=d_n^2+(400-2d_n)x>d_n^2+\tfrac{1}{2}.$$

Според тоа, со малку среќа зајакот постигнува да важи $d_{n+200}^2>d_n^2+\frac{1}{2}$. На овој начин по $400\cdot 100^2=4\cdot 10^6$ чекори зајакот може да му побегне на ловецот на растојание поголемо од 100, без разлика каква стратегија ќе користи ловецот.

4. Дадени се различни точки *R* и *S* на кружница $\Omega$ така што *RS* не е нејзин дијаметар. Нека $\ell$ е тангента на кружницу $\Omega$ во точката *R*. Точката *T* е таква што *S* е средина на отсечката *RT*. Точката *J* на пократкиот лак *RS* на кружницата $\Omega$ е таква што опишаната кружница $\Gamma$ на триаголникот *JST* ја сече правата $\ell$ во две различни точки. Нека *A* е онаа од тие две точки која е поблиска до точката *R*. Правата *AJ* повторно ја сече кружницата $\Omega$ во точката *K*. Докажи дека правата *KT* ја допира кружницата $\Gamma$.

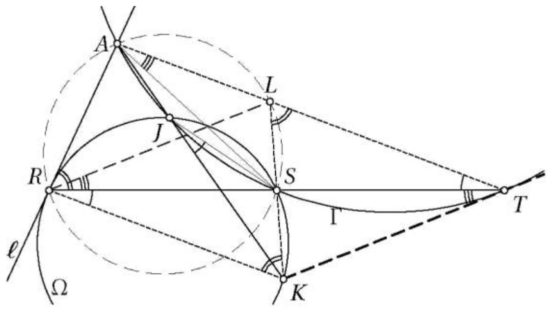
**Решение.** *Прв начин*. Од $\measuredangle KRS=\measuredangle KJS=\measuredangle ATS$ следува $AT\parallel KR$. Нека *L* е точка симетрична на точката *K* во однос на *S*. Четириаголникот *RKTL* е паралелограм, па затоа *L* лежи на правата $AT$. Сега од

$$\measuredangle ARS=\measuredangle RKS=\measuredangle TLS$$

следува дека четириаголникот $ARSL$ е тетивен, а оттука следува

$$\measuredangle KTS = \measuredangle LRS = \measuredangle LAS = \measuredangle TAS,$$

што значи дека правата $KT$ ја допира кружницата $\Gamma$.




*Втор начин*. Од $\measuredangle KRS = \measuredangle KJS = \measuredangle ATS$ и $\measuredangle ARS = \measuredangle RKS$ следува дека триаголниците $ART$ и $SKR$ се слични. Оттука $\frac{\overline{RT}}{\overline{KR}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{ST}}$, што заедно со равенството $\measuredangle ATS = \measuredangle KRT$ дава $\triangle ATS \sim \triangle TRK$. Според тоа, $\measuredangle KTR = \measuredangle TAS$, па правата $KT$ ја допира кружницата $\Gamma$.

5. Даден е природен број $N \geq 2$. Во редица се наоѓаат $N(N+1)$ фудбалери со меѓусебно различни висини. Тренерот Ванчо сака да отстрани $N(N-1)$ играчи, така што ќе остане редица со $2N$ фудбалери во која се задоволени следниве $N$ услови:
1) меѓу двајцата највисоки играчи не стои никој,
2) меѓу третиот и четвртиот играч по висина не стои никој,
..........................................................................................
N) меѓу двајцата најниски играчи не стои никој.
Докажи дека ова секогаш може да се постигне.
**Решение.** Да ја поделиме редицата на $N$ групи со по $N+1$ последователни играчи и со $A_i$ и $B_i$ соодветно да ги означиме највисокиот и вториот највисок играч во $i-$тата група. Нека $B_k$ е највисокиот од сите играчи $B_1, B_2, ..., B_n$. Тренерот Ванчо ги отстранува сите играчи $A_i$ за $i \neq k$ и сите играчи од $k-$тата група освен $B_k$. На играчите $A_k$ и $B_k$ им дава дресови и веќе не се осврнува на нив: тие се повисоки од сите играчи во редицата и меѓу нив не стои ниту еден играч. Остануваат уште $N-1$ група со по $N$ играчи. Ако претходната постапка ја повтори $N$ пати, тогаш Ванчо ја постигнува целта.

6. Подредениот пар цели броеви $(x, y)$ го нарекуваме *примитивна точка* ако најголемиот заеднички делител на броевите $x$ и $y$ е еднаков на 1. Нека $S$ е конечно множество примитивни точки. Докажи дека постојат природен број $n$ и цели броеви $a_0, a_1, ..., a_n$ такви што за секои точки $(x, y)$ од $S$ важи:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

**Решение.** *Прв начин*. Нека

$$S=\{(x_1,y_1),...,(x_k,y_k)\}.$$

Доволно е да се докаже дека постои хомоген полином $P(x,y)$ таков што $P(x_i,y_i)=\pm 1$ за $i=1,2,...,k$. Навистина, тогаш $P(x_i,y_i)^2=1$ за секој $i$. Понатаму, бидејќи за секој хомоген полином $P$ важи $P(-x,-y)=\pm P(x,y)$ можеме да сметаме дека $(x_i,y_i)\neq(-x_j,-y_j)$ за секои $i,j$, т.е. дека никои две точки на множеството $S$ не лежат на иста права која минува низ координатниот почеток.

Ги разгледуваме хомогените полиноми

$$G_i(x,y)=\prod_{j\neq i}(y_jx-x_jy),\text{ за } i=1,2,...,k.$$

Степенот на овие полиноми е $k-1$ и притоа важи $G_i(x_j,y_j)=0$ за $j\neq i$ и $G_i(x_i,y_i)=c_i\neq 0$. Нека $c=\mathrm{NZS}(c_1,...,c_k)$. Постојат линеарни хомогени полиноми $E_i$ такви што $E_i(x_i,y_i)=1$ за $i=1,2,...,k$. Саканиот полином $P$ ќе го дадеме во обликот

$$P(x,y)=F_c(x,y)-\sum_{i=1}^{k}b_iE_i(x,y)^{m-k+1}G_i(x,y),$$

каде $F_c$ е хомоген полином од некој степен $m\geq k-1$ таков што $F_c(x_i,y_i)\equiv 1(\mathrm{mod}\,c)$ за секој $i$, а $b_i=\frac{F_c(x_i,y_i)-1}{c_i}\in\mathbb{Z}$ се соодветните константи. Потребно е само да се докаже дека ваков полином $F_c$ постои.

*Лема*. За секој природен број $c$ постои хомоген полином $Q_c$ таков што за секоја примитивна точка $(x,y)$ важи $Q_c(x,y)\equiv 1(\mathrm{mod}\,c)$.

*Доказ*. Ако $c=p^a$ е степен на прост број, може да се земе

$$Q_c(x,y)=\begin{cases}(x^2+xy+y^2)^{\varphi(c)}, & p=2\\ (x^{p-1}+y^{p-1})^{\varphi(c)}, & p>2.\end{cases}$$

Нека $c=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ е каноничното разложување на бројот $c$. Бидејќи броевите $\frac{c}{p_i^{a_i}}, i=1,2,...,r$ се заемно прости, постојат цели броеви $A_1,...,A_r$ такви што $\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}=1$, а тогаш можеме да земеме

$$Q_c(x,y)=\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}Q_{p_i^{a_i}}(x,y)\equiv\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}=1(\mathrm{mod}\,c).\ \blacksquare$$

*Втор начин*. Нека $S=\{(x_1,y_1),...,(x_k,y_k)\}$. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $k$. Случајот $k=1$ е тривијален. Нека $k\geq 2$. Според индуктивната претпоставка постојат хомогени полиноми $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ со целобројни коефициенти такви што

$$Q(x_i, y_i) = 1 \text{ за } i \neq k-1 \text{ и } R(x_i, y_i) = 1 \text{ за } i \neq k\,,\ (1 \leq i \leq k).$$

Бараниот полином $P(x,y) = \sum_j a_j x^{n-j} y^j$ го бараме во облик

$$P(x,y) = F(Q(x,y), R(x,y))\,,$$

каде $F(u,v)$ е некој хомоген полином. Ако $Q(x_{k-1}, y_{k-1}) = a$ и $R(x_k, y_k) = b$, тогаш важи

$$P(x_i, y_i) = \begin{cases} F(1,1), & i = 1, 2, \ldots, k-2 \\ F(a,1), & i = k-1 \\ F(1,b), & i = k. \end{cases}$$

Значи, доволно е да докажеме дека постои полином $F \in \mathbb{Z}[x,y]$ таков што

$$F(1,1) = F(a,1) = F(1,b) = 1.$$

Сметаме дека $|b| > 1$, а во спротивно ќе земеме

$$F(x,y) = (x-y)(x-a)(x+y)^2 + y^4\,.$$

Запишуваме $F(x,y) = y^m f(\frac{x}{y})$, каде $f \in \mathbb{Z}[x]$ и $m = \deg f$. Треба да важи

$$f(1) = f(a) = 1 \text{ и } f(\tfrac{1}{b}) = \tfrac{1}{b^m}\,,$$

па доволно е да најдеме полином $g \in \mathbb{Z}[x]$ со степен $m-2$ таков што

$$f(t) = (t-1)(t-a)g(t) + 1, \text{ при што важи } g(\tfrac{1}{b}) = \tfrac{1}{b^{m-2}} \cdot \tfrac{b^m - 1}{(b-1)(ab-1)}\,.$$

Ваков полином $g$ постои ако и само ако $(b-1)(ab-1)$ е делител на $b^m - 1$, па така може да се земе $m = \varphi(|b-1| \cdot |ab-1|)$ и индукцијата е готова.