Марија Поповска, Охрид
Самоил Малчески, Скопје

ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД – 1

Решавањето Диофантови равенки е секогаш предизвик. Имено, освен решавањето за линеарната Диофантова равенка со две непознати, која едноставно се решава со методот на Ојлер (види [2], [3] и [5]), не постои универзален елементарен метод дури ни за решавање на квадратните Диофантови равенки со две непознати. Некои методи, како што е методот на Ферма на најбрзо спуштање, преку примери се разработени во [1], [4], [6] и [6].

Во оваа статија, преку примери, ќе се осврнеме на некои постапки за решавање на нелинеарни Диофантови равенки. Првата постапка, на која се однесуваат следните три задачи, е дискусија на количник.

Задача 1. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy+2x=7.$$

Решение. За $x=0$, добиваме $0=7$, што не е можно, па затоа не постои решение на равенката во кое $x=0$. Затоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката $y=\frac{7-2x}{x}$, т.е. на равенката $y=\frac{7}{x}-2$. Понатаму, за да y е цел број потребно и доволно е $x\,|\,7$, од каде добиваме $x=-7,-1,1,7$.

За $x=-7$, наоѓаме $y=\frac{7}{-7}-2=-3$.

За $x=-1$, наоѓаме $y=\frac{7}{-1}-2=-9$.

За $x=1$, наоѓаме $y=\frac{7}{1}-2=5$.

За $x=7$, наоѓаме $y=\frac{7}{7}-2=-1$.

Конечно, во множеството цели броеви сите решенија на дадената равенка се $(-7,-3)$, $(-1,-9)$, $(1,5)$, $(7,-1)$. ■

Задача 2. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy-5x+3y=18.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$y(x+3)=5x+18.$$

Ако $x+3=0$, т.е. $x=-3$, тогаш $5x+18=3\neq 0$, па затоа дадената равенка нема решение (x,y) кај кое $x=-3$.

Според тоа, равенката е еквивалентна на равенката

$$y=\frac{5x+18}{x+3}=\frac{5(x+3)+3}{x+3}=5+\frac{3}{x+3}.$$

Понатаму, за да y е цел број потребно и доволно е $x+3|3$, од каде добиваме $x+3=-3,-1,1,3$.

Ако $x+3=-3$, тогаш $x=-6$ и $y=4$.

Ако $x+3=-1$, тогаш $x=-4$ и $y=2$.

Ако $x+3=1$, тогаш $x=-2$ и $y=8$.

Ако $x+3=3$, тогаш $x=0$ и $y=6$.

Конечно, во множеството цели броеви сите решенија на дадената равенка се $(-6,4)$, $(-4,2)$, $(-2,8)$, $(0,6)$. ■

Задача 3. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy+3y=x^2+6x+12.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$y(x+3)=x^2+6x+12.$$

Ако $x+3=0$, т.е. $x=-3$, тогаш $x^2+6x+12=3\neq 0$, па затоа дадената равенка нема решение (x,y) кај кое $x=-3$. Според тоа, равенката е еквивалентна на равенката

$$y=\frac{x^2+6x+12}{x+3}=\frac{(x+3)^2+3}{x+3}=x+3+\frac{3}{x+3}.$$

Понатаму, за да y е цел број потребно и доволно е $x+3|3$, од каде добиваме $x+3=-3,-1,1,3$.

Ако $x+3=-3$, тогаш $x=-6$ и $y=-4$.

Ако $x+3=-1$, тогаш $x=-4$ и $y=-4$.

Ако $x+3=1$, тогаш $x=-2$ и $y=4$.

Ако $x+3=3$, тогаш $x=0$ и $y=4$.

Конечно, во множеството цели броеви сите решенија на дадената равенка се $(-6,-4)$, $(-4,-4)$, $(-2,4)$, $(0,4)$. ■

Друг елементарен за решавање решавање на Диофантовите равенки од втор ред е Диофантовата равенка да се запише во вид на збир на точни квадрати еднаков на онстанта. Ќе разгледаме неколку пример.

Задача 4. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2-6x+y^2+4x+13=0.$$
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$(x-3)^2+(y+2)^2=0.$$
Збир на два квадрати е еднаков на 0 ако и само ако и двата се еднакви на нула, па затоа $x-3=0$ и $y+2=0$, од каде добиваме $x=3, y=-2$. ■

Задача 5. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2+z^2+6x+4y+2z+20=0.$$
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$(x+3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2+1=0.$$
Бидејќи квадрат на цел број е ненегативен број, заклучуваме дека
$$(x+3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2+1\geq 0+0+0+1=1>0,$$
за секои x,y,z, што значи дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви. ■

Задача 6. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+6=0.$$
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=3.$$
Бројот 3, ако се земе предвид и редоследот на собироците, како збир на три квадрати може да се запише на следниве начини:
$$\begin{aligned}
&1^2+1^2+1^2=3,\\
&1^2+1^2+(-1)^2=3,\\
&1^2+(-1)^2+1^2=3,\\
&(-1)^2+1^2+1=3,\\
&1^2+(-1)^2+(-1)^2=3,\\
&(-1)^2+1^2+(-1)^2=3,\\
&(-1)^2+(-1)^2+1^2=3,\\
&(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2=3.
\end{aligned}$$
За секој од горните осум записи добиваме по едно решение на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 7. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z+6=0.$$

Упатство. Дадената равенка запиши ја во видот

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9,$$

Сега, искористи дека како збир на три квадрати на ненегативни броеви бројот 9 може да се запише на два начини

$$0^2+0^2+3^2=9 \text{ и } 1^2+2^2+2^2=9,$$

и потоа земи го во предвид редоследот на собироците и фактот дека $x-1, y-1, z-1$ може да се како позитивни, така и негативни. ■

Задача 8. Определи го бројот на правоаголните триаголници кај кои должината на едната катета е еднаква на 6, а должините на другата катета и хипотенузата се природни броеви.

Решение. Со a и c да ги означиме должината на другата катета и хипотенузата, соодветно. Тогаш, од Питагоровата теорема следува

$$c^2-a^2=6^2, \text{ т.е. } (c-a)(c+a)=36.$$

Бидејќи $c+a>c-a>0$, можни се следниве случаи:

$$\begin{cases} c+a=36, \\ c-a=1, \end{cases} \quad \begin{cases} c+a=18, \\ c-a=2, \end{cases} \quad \begin{cases} c+a=12, \\ c-a=3, \end{cases} \quad \begin{cases} c+a=9, \\ c-a=4. \end{cases}$$

Бидејќи a и c се природни броеви,м нивниот збир и нивната разлика се со иста парност, па затоа можен е само системот

$$\begin{cases} c+a=18, \\ c-a=2, \end{cases}$$

од каде добиваме $c=10, a=8$. Според тоа, постои само еден правоаголен триаголник со наведеното својство. ■

Следниот метод за решавање на нелинеарни Диофантови равенки е користење на деливоста. Идејата е дадената равенка да се запише во еквивалентна равенка, таква што јасно се гледа дека едната страна е делива со некој број, па затоа и другата страна мора да е делива со тој број. Ќе разгледаме неколку примери во кои ќе го користиме претходно кажаното.

Задача 9. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p+q=q^2-40.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$p+40=q(q-1).$$

Десната страна на равенката е производ на два последователни броја, па затоа таа е парен број. Според тоа, $p+40$ мора да е парен број, од каде следува $p=2$. Сега, од $q(q-1)=p+40=42=7\cdot 6$ добиваме $q=7$. ■

Задача 10. Определи ги сите природни двоцифрени броеви кои се еднакви на збирот на квадарот на цифрата на десетките и кубот на цифрата на единиците со кои се запишани.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{xy}$. Од условот на задачата следува равенката $10x+y=x^2+y^3$, која е еквивалентна на равенката

$$10x-x^2=(y-1)y(y+1).$$

Десната страна на равенката е производ на три последователни природни броја, па затоа е делива со 6, што значи дека и $10x-x^2$ мора да е делив со 6. Но, тоа значи дека цифрата x е парна и како $10x-x^2=9x+x-x^2$ заклучуваме дека $x-x^2=x(1-x)$ мора да е делив со 3. Со непосредна проверка се добива дека единствени можности се $x=4$ и $x=6$.

Ако $x=4$, тогаш $24=(y-1)y(y+1)$, па $y=3$, а бараниот број е $43=4^2+3^3$.

Ако $x=6$, тогаш $24=(y-1)y(y+1)$, па $y=3$, а бараниот број е $63=6^2+3^3$. ■

Задача 11. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x!+5y=6666.$$

Решение. Бројот 6666 при делење со 5 дава остаток 1. Тоа значи дека и бројот $x!+5y$ при делење со 5 мора да дава остаток 1. Но, $5|5y$, па затоа $x!$ при делење со 5 мора да дава остаток 1. Јасно, ако $x\geq 5$, тогаш $5|x!$, па затоа доволно е да ги испитаме случаите $x=1,2,3,4$. Имаме, $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$ и $4!=24$, што значи дека само $1!=1$ и $3!=6$ при делење со 5 даваат остаток 1. Според тоа,

- ако $x=1$ и тогаш $5t=6665$, т.е. $y=1333$,
- ако $x=3$ и тогаш $5y=6660$, т.е. $y=1332$. ■

Задача 12. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=8k-1.$$

Решение. Имаме $8k-1=4(2k-1)+3$, што значи дека бројот $8k-1$ при делење со 4 дава остаток 3. Понатаму, знаеме дека квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, во зависност од тоа дали природниот број е парен или непарен. Сега, бидејќи остатокот на $x^2+y^2+z^2$ при делење со 4 е 3, мора сите три броја x,y,z да се непарни. Според тоа, $x=2a+1, y=2b+1, z=2c+1$, за некои $a,b,c\in\mathbb{N}$. Заменуваме во почетната равенка и ја добиваме равенката

$$4a(a+1)+4b(b+1)+4c(c+1)=8k-4. \qquad (1)$$

Понатаму, производ на два последователни броја е парен број, па затоа левата страна на (1) е збир на три броја секој од кои е делив со 8, т.е. таа е делива со 8. Но, $8k-4$ не е делив со 8, па затоа (1) нема решение во множеството природни броеви, што значи дека почетната равенка нема решение во множеството природни броеви. ■

Задача 13. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$1!+2!+3!+4!+...+x!=y^2. \qquad (2)$$

Решение. Во задача 11 забележавме дека за $x\geq 5$ важи $5|x!$ и како $2|x!$ заклучуваме дека цифрата на единиците на бројот $x!$ е 0. СПоред тоа, за $x\geq 5$ цифрата на единиците на збирот $1!+2!+3!+4!+...+x!$ е еднаква на цифрата на единиците на збирот $1!+2!+3!+4!=33$. Но, квадрат на природен број има цифра на единици 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа равенката (2) нема решение за кое $x\geq 5$. Останува да ги испитаме случаите кога $x\leq 4$.

- За $x=4$ имаме $1!+2!+3!+4!=33\neq y^2$ за секој $y\in\mathbb{N}$.
- За $x=3$ имаме $1!+2!+3!=9=3^2$, па затоа $y=3$.
- За $x=2$ имаме $1!+2!=3\neq y^2$ за секој $y\in\mathbb{N}$.
- За $x=1$ имаме $1!=1=1^2$, па затоа $y=1$.

Конечно, $(x,y)=(1,1),(3,3)$ се единствени решенија на равенката (2). ■

Задачи за самостојна работа

1. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$2xy-4x-y=3.$$
2. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2-2x+2y-3=0.$$
3. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2+z^2+4x+6y+8z+23=0.$$
4. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$2x^2+y^2-4x+8y+18=0..$$
5. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$z^4-y^4=15.$$
6. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се девет пати поголеми од збирот на своите цифри.
7. Определи ги сите прости броеви p и сите природни броеви x такви што $x!+2=p^2$.
8. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2=10^k-1.$$
9. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x!+y^2=987654.$$
10. Реши го бројниот ребус
$$a\cdot b\cdot \overline{ab}=\overline{bbb}.$$
11. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$2^x-3^y=7.$$
12. Определи ги сите природни броеви кои се 11 пати поголеми од збирот на квадратите на цифрите со кои се запишани.
13. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x!+y!=z!.$$
14. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+x\cdot x!=y^4.$$

Литература

1. Аневска, К., Малчески, А. (2021). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, https://matematickitalent.mk
2. Гроздев, С. (2021). Црвенкапа и Диофантовата равенка од прв ред, https://matematickitalent.mk
3. Малчески, Р. (2021). Линеарна Диофантова равенка, https://matematickitalent.mk
4. Малчески, Р. (2021). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, https://matematickitalent.mk
5. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
6. Малчески, С. (2022). Математички талент 26 – Збирка заадачи по теорија на броеви, (во печат)