XLII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Определи ги цифрите a,b така што збирот $\overline{323a}+\overline{b410}$ да биде делив со 9?

Решение. Очигледно збирот ќе биде четирицифрен или петцифрен број. Ако збирот е четирицифрен број, тогаш цифрата b е помала или еднаква на 6, а цифрите на збирот се: првата $3+b$, втората 6, третата 4 и четвртата a. Даденот збир е делив со 9 ако и само збирот на цифрите $3+b+6+4+a=13+a+b$ е делив со 9. Имаме

- $b=6$, збирот е $19+a$, па затоа $a=8$
- $b=5$, збирот е $18+a$, па затоа $a=0$ или $a=9$
- $b=4$, збирот е $17+a$, па затоа $a=1$
- $b=3$, збирот е $16+a$, па затоа $a=2$
- $b=2$, збирот е $15+a$, па затоа $a=3$
- $b=1$, збирот е $14+a$, па затоа $a=4$

Во случајот кога збирот е петцифрен број, тогаш неговите цифри се петтата $a,$ четвртата 4, третата 6, втората $b+3-10$ и првата 1. Нивниот збир е $a+4+6+b+3-10+1=a+b+4$ каде цифрата b е еднаква на 7, 8 или 9. Можни се следниве случаи:

- $b=7$, збирот е $11+a$, па затоа $a=7$
- $b=8$, збирот е $12+a$, па затоа $a=6$
- $b=9$, збирот е $13+a$, па затоа $a=5$.

2. Дадени се два броја, чиј збир е 4500. Ако првиот број се зголеми четири пати, а вториот двапати, тогаш збирот на така добиените броеви е 11480. Определи ги дадените броеви?

Решение. Ако и двата броја се зголемат двапати, тогаш нивниот збир исто та се зголемува двапати и тој е еднаков на 9000. Според тоа, ако само првиот број се зголеми двапати се добива бројот

$$11480-9000=2480.$$

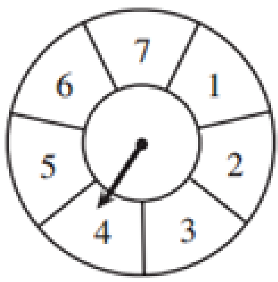
Значи, бараните броеви се

$$2480:2=1240 \text{ и } 4500-1240=3260.$$

3. Во едно училиште во петто оделение учат 140 ученици. Во шесто одделение учат 5% помалку ученици отколку во петто одделение. Вкупниот број ученици кои учат во петто и шесто одделение е еднаков на 91% од вкупниот број ученици кои учат во шесто и седмо одделение и овој број е еднаков на 26% од бројот на сите ученици кои учат во ова училиштето. Колку ученици учат во седмо одделени? Колку ученици учат во ова училиште?

Решение. Во шесто одделенија учат 95% од бројот на учениците во петто одделение, што значи дека во шесто одделение учат $0,95\cdot 140 =133$ ученици. Значи, во петто и шесто одделение вкупно имз $140+133=273$ ученици. Но, овој број е еднаков на 91% од вкупниот број ученици во шесто и седмо одделение, па затоа $273=0,91\cdot x$, каде x е вкупниот број на ученици во шесто и седмо одделение. Значи, $x=\frac{273\cdot 100}{91}=300$ ученици. Сега, само во седмо одделение има $300-133 =167$ ученици. Од последниот услов, 273 да е 26% од вкупниот број на ученици, добиваме дека бројот на ученици во училиштето е $\frac{273\cdot 100}{26} =1050$.

4. Во играта „часовник“, на почетокот стрелката покажува еден од броевите од 1 до 7 (цртеж десно). Во секој чекор, стрелката се поместува во насока на движењето на стрелките на часовникот за толку полиња колку што е бројот запишан во полето пред почетокот на чекорот. На пример, на цртежот стрелката покажува на бројот 4, што значи дека таа треба да се помести за 4 полиња и ќе покажува на полето со бројот 1, па во следниот чекор се поместува за 1 поле и ќе покажува на полето во кое е запишан бројот 2 итн. После одиграни 21 потег стрелата покажува на полето во кое е запишан бројот 6. На кое поле покажувала стрелката после првиот одигран потег?



Решение. Ќе составиме табела во која ќе ја внесуваме моменталната и следната позиција на стрелката, а потоа табела во која ќе ја внесиме моменталната и претходната позиција на стрелката. Имаме

Моментална позиција	Наредна позиција
1	2
2	4
3	6
4	1
5	3
6	5
7	7

па затоа

Моментална позиција	Претходна позиција
2	1
4	2
6	3
1	4
3	5
5	6
7	7

Задачата ќе ја решиме одејќи одназад на нанапред. Значи за стрелката да покажува кон 6 после 21-от чекор, таа мора да покажува кон кон 3 после 20-тиот чекор, па на 5 после 19-тиот чекор, на 6 после 18-тиот чекор итн. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека стрелката покажува на 6 после 15-тиот, 12-тиот, 9-тиот, 6-тиот и 3-тиот чекор. Бидејќи покажува на 6 после 3-тиот чекор, таа покажува на 3 после вториот и конечно на 5 после првиот чекор.

5. Во секоја од 7 штали е сместен непарен број коњи и тоа така да броевите на коњите во шталите формираат низа од последователни непарни природни броеви. Во секоја штала се сместени помалку од 77 коњи. Вкупниот број на коњи во сите 7 штали е запишан со цифри чиј збир е 7. Колку коњи има во секоја од шталите?

Решение. Збир на кои било 7 непарни броеви е непарен број. Вкупниот број на коњи е запишан со број чиј збир на цифри е 7, па збирот може да завршува само на една од цифрите 1, 3 или 5 (ако завршува на 7 или 9, збирот на цифрите ќе биде поголем од 7). Најмалиот можен збир на седум последователни непарни броја е

$$1+3+5+7+9+11+13=49,$$

со збир на цифри кој не е еднаков на 7. Најголемиот можен збир на седум последователни непарни броеви помали од 77 е

$$75+73+71+69+67+65+63=483$$

со збир на цифри кој не е еднаков на 7. Сега, трицифрени броеви со збир на цифри 7, поголеми од 49, а помали од 483, со последна цифра 1, 3 или 5 се:

115, 205, 133, 223, 313, 403, 151, 241, 331, 421.

Да забележиме дека збирот на седум последователни непарни броеви е делив со 7. Навистина, ако a е непарен број, тогаш збирот на седум последователни непарни броевие:

$$a+(a+2)+(a+4)+(a+6)+(a+8)+(a+10)+(a+12)=7a+42=7(a+6)$$
.

Од најдените броеви само бројот 133 е делив со 7, па затоа

$$7(a+6)=133,\ \ a+6=19,\ \ a=13.$$

Значи, првиот број во бараната низа е 13, а во шталите редоследно, бројот на коњите е даден со низата 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.

VII одделение

1. Определи ги сите трицифрени броеви помали од 550 такви што цифрата на стотките е еднаква на производот на другите две цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Бидејќи $\overline{abc}<550$, следува дека $a\in\{1,2,3,4,5\}$.

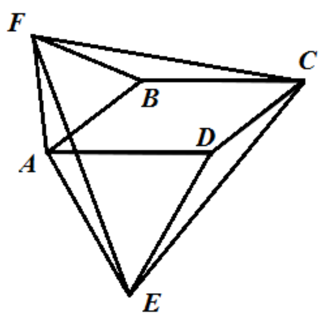
Ако $a=1$, тогаш $b\cdot c=1$, од каде се добива дека $b=1$ и $c=1$ т.е. бараниот број е 111.
Ако $a=2=1\cdot 2=2\cdot 1$, тогаш се добиваат броевите 212 и 221.
Ако $a=3=1\cdot 3=3\cdot 1$, тогаш бараните броеви се 313 и 331.
Ако $a=4=1\cdot 4=4\cdot 1=2\cdot 2$, тогаш бараните броеви се 414, 422 и 441.
Ако $a=5=1\cdot 5=5\cdot 1$, тогаш бараните броеви се 515 и 551. Бидејќи трицифрените броеви треба да се помали од 550, бројот 551не е решение.
Конечно, бараните броеви се: 111, 212, 221, 313, 331, 414, 441, 422 и 515.

2. Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните AB и AD, надвор од паралелограмот $ABCD$, се конструирани рамнострани триаголници ABF и DAE. Докажи, дека триаголникот ECF е рамностран.

Решение. Ќе покажеме дека

$$\triangle AFE\cong\triangle BFC\cong\triangle DCE,$$

од каде следува дека $\overline{FE}=\overline{FC}=\overline{CE}$.



Од $\overline{AB}=\overline{DC}$ (спротивни страни во паралелограм), и $\overline{AB}=\overline{AF}=\overline{BF}$ (страни на рамностран триаголник) добиваме $\overline{DC}=\overline{AF}=\overline{BF}$. Аналогно, $\overline{AE}=\overline{DE}=\overline{BC}$.
Но, $\measuredangle ADC\cong\measuredangle ABC$ како спротивни агли во паралелограм, па затоа

$$\measuredangle EDC = 360° - \measuredangle ADE - \measuredangle ADC$$
$$= 360° - \measuredangle ABF - \measuredangle ABC = \measuredangle FBC.$$

Понатаму, $\measuredangle BAD = 180° - \measuredangle ADC$, како соседни агли во паралелограм,.

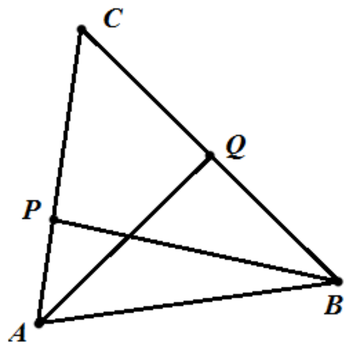
$$\measuredangle FAE = \measuredangle FAB + \measuredangle BAD + \measuredangle DAE = 120° + \measuredangle BAD$$
$$= 120° + 180° - \measuredangle ADC = 300° - \measuredangle ADC = \measuredangle EDC.$$

Тогаш според признакот за складност на триаголници САС, важи $\triangle AFE \cong \triangle BFC \cong \triangle DCE$, со што доказот е завршен.

3. Даден е ΔABC. Точките P и Q лежат на страните AC и BC, соодветно и се такви што периметарот на ΔABP е еднаков со периметарот на $\triangle ABQ$, а периметарот на $\triangle AQC$ е еднаков со периметарот на $\triangle PBC$. Докажи, дека ΔABC е рамнокрак.

Решение. Имаме

$$L_{\triangle ABQ} + L_{\triangle AQC} =$$
$$= \overline{AB} + \overline{BQ} + \overline{AQ} + \overline{AQ} + \overline{QC} + \overline{AC}$$
$$= \overline{AB} + (\overline{BQ} + \overline{QC}) + 2\overline{AQ} + \overline{AC}$$
$$= \overline{AB} + \overline{BC} + 2\overline{AQ} + \overline{AC}$$
$$= L_{\triangle ABC} + 2\overline{AQ}$$



и

$$L_{\triangle ABP} + L_{\triangle PBC} =$$
$$= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{BC} + \overline{PC}$$
$$= \overline{AB} + (\overline{AP} + \overline{PC}) + 2\overline{BP} + \overline{BC}$$
$$= \overline{AB} + \overline{AC} + 2\overline{BP} + \overline{BC}$$
$$= L_{\triangle ABC} + 2\overline{BP}$$

Сега, од $L_{\triangle ABP} = L_{\triangle ABQ}$ и $L_{\triangle AQC} = L_{\triangle PBC}$ и претходните равенства следува дека $\overline{AQ} = \overline{BP}$. Понатаму, од

$$\overline{AP} = L_{\triangle ABP} - \overline{BP} - \overline{AB} = L_{\triangle ABQ} - \overline{AQ} - \overline{AB} = \overline{BQ}$$

следува дека триаголниците ABP и ABQ имаат една заедничка страна и $\overline{AQ} = \overline{BP}$, $\overline{AP} = \overline{BQ}$, па затоа тие се складни. Според тоа,

$$\measuredangle CAB = \measuredangle PAB = \measuredangle QBA = \measuredangle CBA,$$

т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак со краци AC и BC.

4. Природен број n при делење со 3 дава остаток a, при делење со 6 дава остаток b и при делење со 9 дава остаток c. Познато е дека $a+b+c=15$. Определи го остатокот при делење на бројот n со 18.

Решение. Од условот на задачата следува дека бројот n може да се запише во облиците $n=3p+a$, $n=6q+b$ и $n=9r+c$, при што бидејќи a,b,c се остатоци при делењето на n со 3,6,9, соодветно, важи $0\leq a\leq 2$, $0\leq b\leq 5$, $0\leq c\leq 8$, па затоа $0\leq a+b+c\leq 15$. Понатаму, бидејќи $a+b+c=15$, добиваме дека $a=2$, $b=5$ и $c=8$. Сега, $n+1=3p+3=6q+6=9r+9$. Според тоа, бројот $n+1$ е делив со $3,6,9$, па затоа $n+1$ е делив со $\text{NZS}(3,6,9)=18$. Конечно, бројот n при делење со 18 дава остаток 17 .

5. На кружница, во произволен редослед се запишани броевите 50, 100, 150, ..., 1500. Докажи, дека меѓу запишаните броеви постојат три последователни броја чиј збир е поголем или еднаков на 2350.

Решение. Збировите од секои три последователно запишани броја да ги означиме со $S_1, S_2,\dots, S_{30}$. Во збирот $S_1+S_2+\dots+S_{30}$ секој од броевите 50, 100, 150, ..., 1500 се јавува точно трипати, па затоа

$$\begin{aligned} S_1+S_2+\dots+S_{30} &= 3\cdot(50+100+\dots+1500)\\ &=150\cdot(1+2+\dots+30)\\ &=150\cdot\tfrac{30\cdot31}{2}=69750. \end{aligned}$$

Ако секој од броевите $S_1, S_2,\dots, S_{30}$ е помал помал од 2350, тогаш секој ќе биде помал или еднаков од 2300 (два собирци се разликуваат за 50 и секој собирок е делив со 50), па затоа ќе важи

$$S_1+S_2+\dots+S_{30}\leq 30\cdot 2300=69000<69750,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува дека постои k, $1\leq k\leq 30,$ таков што $S_k\geq 2350.$

VIII одделение

1. Должините на страните на еден правоаголен триаголник се изразени со природни броеви. Дали е можно должините на катетите да бидат изразени со непарни броеви? (Одговорот да се образложи)

Решение. Нека $a=2p+1$ и $b=2s+1,$ $p,s\in\mathbb{N}$ се катети на правоаголниот триаголник. Тогаш, за хипотенузата имаме

$$c^2=a^2+b^2=(2p+1)^2+(2s+1)^2=4p^2+4p+1+4s^2+4s+1$$
$$=4(p^2+p+s^2+s)+2$$

што не е можно, бидејќи ако $c=2k$, тогаш $c^2=4k^2$, а ако $c=2k+1$, тогаш $c^2=4k(k+1)+1$, т.е. квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1.

2. Нека $\overline{xyy}$ е трицифрен број делив со 7. Докажи дека збирот на цифрите на бројот $\overline{xyy}$ е делив со 7.

Решение. Го запишуваме бројот $\overline{xyy}$ во обликот

$$\overline{xyy}=100x+10y+y=7(14x+y)+2(x+2y),$$

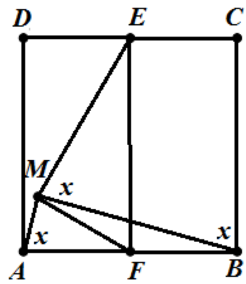
каде x,y се цифри. Бидејќи $\overline{xyy}$ е делив со 7, од последното равенство следува дека $7\,|\,2(x+2y)$, и како $\mathrm{NZD}(2,7)=1$ добиваме дека $7\,|\,x+2y$, што и требаше да се докаже.

3. Двајца велосипедисти почнуваат тренинг истовремено. Едниот тргнува од Скопје, а другиот од Гевгелија еден кон друг. Кога се на растојание од 180 *km* еден од друг, во тренингот се вклучува една мува. Таа стартува од рамото на едниот велосипедист и лета да го сретне другиот. Застанува на неговото рамо и се веднаш се враќа назад кон првиот велосипедист. Ова го повторува се додека двајцата велосипедисти не се сретнат. Мувата лета со брзина од 30 *km* на час, а велосипедистите се движат со брзина 15 *km* на час. Колку километри ќе прелета мувата за време на тренингот?

Решение. Од моментот кога мувата се приклучува во тренингот до моментот кога велосипедистите се сретнуваат ќе поминат $\frac{180km}{2\cdot 15km/h}=6h$ Значи мувата ќе лета 6 *h*, односно таа ќе прелета $6\cdot 30km=180km$.

4. Нека E е средина на страната CD на квадратот $ABCD$. Точка M во внатрешноста на квадратот е таква што $\measuredangle MAB=\measuredangle MBC=\measuredangle BME=x$. Определи го x?

Решение. Да го означиме $\measuredangle ABM$ со y. Бидејќи $\measuredangle ABC=x+y=90^\circ$, од триаголникот ABM добиваме дека $\measuredangle AMB=90^\circ$. Нека F е средината на страната AB. Тогаш од правоаголниот триаголник ABM добиваме

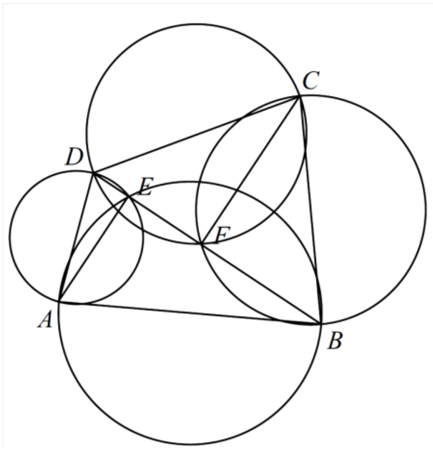


$\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{MF}$. Понатаму, $\measuredangle FMB = \measuredangle FBM = y$ од каде следува $\measuredangle EMF = x + y = 90^\circ$. Триаголникот MFE е правоаголен при што $EF = 2MF$ од каде следува $\measuredangle MFE = 60^\circ$ и

$$\measuredangle MBF = \tfrac{1}{2}\measuredangle MFA = \tfrac{1}{2}(90^\circ - \measuredangle MFE) = 15^\circ.$$

Конечно $x = 75^\circ$.

5. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Докажи, дека било која точка од четириаголникот $ABCD$ и неговата внатрешност лежи барем во еден од четирите кругови чии дијаметри се страните на тој четириагоник.



Решение. Нека точките E и F се подножја на висините спуштени од темињата A и C кон страната BD, соодветно. На овој начин со помош на дијагоналата BD и точките E и F, четириаголниот $ABCD$ е поделен на четири правоаголни триаголници.

Според Талесовата теорема точката E лежи на кружницата со дијаметар AB. Следува секоја точка од триаголникот ABE лежи во кругот со дијаметар AB. Аналогно, останатите три правоаголници триаголници лежат во круговите со дијаметри BC, CD и DA.

Следува секоја точка од четириаголникот $ABCD$, лежи во барем еден четирите кругови, чии дијаметри се страните на тој четириаголник.

IX одделение

1. Определи ги сите парови последователни природни броеви такви што едниот број може да се запише како производ $2(n-3)(n+1)$, а другиот како производ $(n-2)(2n-1)$ каде што n е природен број.

Решение. Разликата на два последователни природни броеви е 1, па во зависност од тоа кој број е поголем имаме два случаи:

1. $2(n-3)(n+1)-(n-2)(2n-1)=1$ од каде што $n=9$, а бараните броеви се 119 и 120.

2. $(n-2)(2n-1)-2(n-3)(n+1)=1$ од каде што $n=7$, а бараните броеви се 64 и 65.

2. Кој е најголемиот природен број кој го задоволува следниот услов: било кои две соседни цифри во истиот редослед формираат двоцифрен број делив со 23?

Решение. Двоцифрени броеви кои се деливи со 23 се 23, 46, 69 и 92. Најголем број кој го задоволува условот на задачата е 46923.

3. Определи ги сите цели броеви n за кои $\sqrt{n^2+4n-5}$ е исто така цел број.

Решение. Нека $\sqrt{n^2+4n-5}=m$. Според тоа,

$$\sqrt{n^2+4n-5}=m \Rightarrow n^2+4n-5=m^2 \Rightarrow n^2+4n+4-9=m^2$$
$$\Rightarrow (n+2)^2-m^2=9 \Rightarrow (n+2+m)(n+2-m)=9.$$

Двата множители на левата страна во последното равенство се непарни цели броеви.

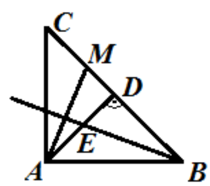
Бидејќи $m\geq 0$, можни се следниве случаи:

$$\begin{cases} n+2+m=9 \\ n+2-m=1 \end{cases}, \begin{cases} n+2+m=3 \\ n+2-m=3 \end{cases}, \begin{cases} n+2+m=-3 \\ n+2-m=-3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} n+2+m=-1 \\ n+2-m=-9 \end{cases}.$$

Оттука лесно наоѓаме дека $n=3, n=1, n=-5, n=-7$.

4. Нека ABC е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол во темето C, и нека D е подножјето на висината повлечена од C. Ако симетралата на аголот CAB ја сече висината CD во точката E, докажи дека $\overline{BC}+\overline{CE}=\overline{AB}$.

Решение. Нека M е точка од хипотенузата таква што $\overline{AC}=\overline{AM}$. Тогаш триаголникот AMC е рамнокрак со основа CM и



$$\measuredangle ACM=\measuredangle AMC=\tfrac{180^\circ-45^\circ}{2}=67^\circ30',$$

па следува дека

$$\measuredangle BCM=90^\circ-67^\circ30'=22^\circ30'.$$

Бидејќи

$$\measuredangle CAE=\measuredangle BCM=22^\circ30',\ \overline{AC}=\overline{BC} \text{ и } \measuredangle ACE=\measuredangle CBM=45^\circ,$$

следува дека триаголниците CAE и BCM се складни.

Значи, $\overline{BM} = \overline{CE}$, па добиваме дека

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AC} + \overline{CE}.$$

5. За различните реални броеви a,b,c е важи

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} = 2.$$

Пресметај

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}.$$

Решение. Воведуваме смени

$$x = \frac{a}{b-c}, y = \frac{b}{c-a}, z = \frac{c}{a-b}.$$

Тогаш условот на задачата го добива обликот $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, а збирот кој се бара е $x + y + z$. Да забележиме дека

$$x+1 = \frac{a+b-c}{b-c}, y+1 = \frac{b+c-a}{c-a}, z+1 = \frac{c+a-b}{a-b} \text{ и}$$

$$x-1 = \frac{a+c-b}{b-c}, y-1 = \frac{b+a-c}{c-a}, z-1 = \frac{c+b-a}{a-b}$$

од каде следува

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1).$$

Последното равенство е еквиалентно со равенството $xy + yz + zx = -1$. Тогаш

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 2 - 2 = 0$$

од каде добиваме $x + y + z = 0$.