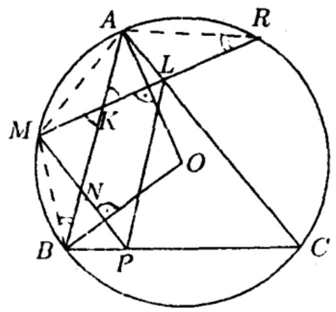
БМО 1991

1. Нека M е точка на лакот AB од опишаната кружница околу остроаголен $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Нормалата повлечена од M на радиусот OA (O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$) ги сече страните AB и AC соодветно во точките K и L, а нормалата повлечена од M на радиусот OB ги сече страните AB и BC соодветно во точките N и P. Изрази го $\measuredangle MLP$ со помош на аглите на триаголникот, ако е дадено, дека $\overline{KL} = \overline{MN}$.

   Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Имаме:
$$\measuredangle MKN = \measuredangle AKL = 90^\circ - \measuredangle OAB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle AOB) = \gamma.$$
   Аналогно, $\measuredangle MNK = \gamma$, т.е. $\triangle MNK$ е рамнокрак и од условот добиваме, дека $\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL}$. Од друга страна $\triangle ALK \sim \triangle ABC$ (аглите им се α е заедниччки агол и $\measuredangle AKL = \gamma$). Оттука следува $\overline{KL} = \overline{AK} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. Понатаму, нека R е пресечната точка на MK со кружницата. Бидејќи $AO \perp MR$, добиваме $\overline{AM} = \overline{AR}$. Освен тоа, $\triangle AKR \sim \triangle MKB$, т.е.
$$\overline{AK} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$
   Добиваме
$$\overline{KL} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$
   Аналогно,
$$\overline{NP} = \overline{MN} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$
   Бидејќи $\overline{KL} = \overline{MN}$, важи $\overline{MN} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$



   и значи
$$\overline{NP} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \overline{MK}.$$
   Според тоа, $\overline{NP} = \overline{MN}$, а претходно видовме дека $\overline{MK} = \overline{KL}$. Значи, NK е средна линија во $\triangle MLP$, па затоа $\measuredangle MLP = \measuredangle MKN = \gamma$.

2. Докажи, дека постојат бесконечно многу триаголници T кои не се складни и за кои:

   а) должините на страните a,b,c на T се заемно прости природни броеви, т.е. најголемиот заеднички делител на a,b,c е 1,

   б) плоштината на T е природен број,

   в) должините на висините на T не се природни броеви.

   Решение. Триаголниците со страни

$$a = 4n^2 + 1, b = 4n^4 + 1, c = 4n^2(n^2 + 1),$$

каде $n \geq 2$ е природен број, ги имаат саканите својства. Доказот непосредно следува од равенствата $s-a = 4n^4$, $s-b = 4n^2$, $s-c = 1$ и Хероновата формула

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Триаголниците со страни

$$a = (n+1)^2(n^2+1), b = n^2(n^2+n+2), c = 2n^4 + 2n^2 + 1,$$

каде $n \geq 5$ е непарен природен број ги имаат саканите својства. Докажи!

3. Правилен шестаголник со плоштина H е впишан во конвексен многуаголник со плоштина P. Докажи дека $P \leq \frac{3H}{2}$. Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин*. Нека правилниот шестаголник е $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и должината на неговата страна е a. Да конструираме шест рамнострани триаголници $A_iA_{i+1}B_i$, $i = 1,2,3,4,5,6$, каде $A_7 \equiv A_1$, надворешни за шестаголникот. Тогаш за секој $i = 1,2,3,4,5,6$ постои права l_i која минува низ A_i, но не содржи внатрешни точки ниту на шестаголникот, нуту на опишаниот многуаголник. Со M_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ да ја означиме пресечната точка на l_i и l_{i+1}, соодветно. Тогаш опишаниот многуаголник се содржи во многуаголникот $M_1M_2M_3M_4$ M_5M_6.

Точката M_i е внатрешна за $\triangle A_iA_{i+1}B_i$, па затоа $\alpha_i = \measuredangle M_iA_iA_{i+1} \leq 60^\circ$. Имаме

$$\begin{aligned} P_{A_iA_{i+1}M_i} &= \frac{a^2 \sin\alpha_i \sin(60^\circ - \alpha_{i+1})}{2\sin(\alpha_i + 60^\circ - \alpha_{i+1})} \\ &= \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha_{i+1}))} \\ &\leq \frac{a^2}{8}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})), \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha_i = 60^\circ - \alpha_{i+1}$. (Тука го искористивме неравенството $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \geq 4, x > 0, y > 0$.) Според тоа,

$$\begin{aligned} P \leq P_{M_1M_2\dots M_6} &= H + \sum_{i=1}^{6} P_{A_iA_{i+1}M_i} \\ &\leq H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})) \\ &= H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_i)). \end{aligned}$$

Но,

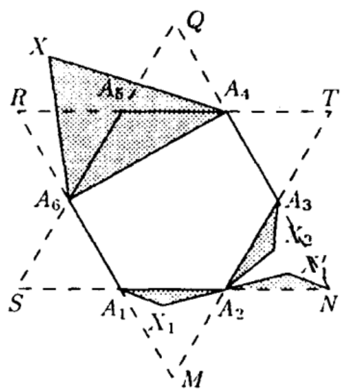
$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)} \geq \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ-\alpha),\ \text{за}\ 0 \leq \alpha \leq 60^\circ,$$

па затоа

$$P \leq H + \frac{a^2}{8}\cdot 6\operatorname{tg}60^\circ = H + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3H}{2},$$

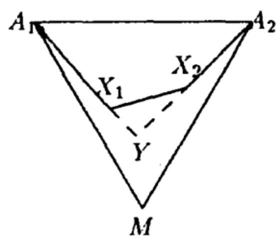
со што е неравенството е докажано.

Втор начин. Нека правилниот шестаголник е $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Со M, N, T, Q, R, S ги означуваме пресечните точки на правите A_1A_6 и A_2A_3, A_1A_2 и A_3A_4, A_2A_3 и A_4A_5, A_3A_4 и A_5A_6, A_4A_5 и A_6A_1, A_5A_6 и A_1A_2, соодветно. Ќе докажеме дека многуаголникот со плоштина P, кој исто така ќе го означуваме со P, е впишан во ѕвездата $A_1MA_2NA_3TA_4Q$ A_5RA_6S.



Да претпоставиме дека X е од P и нека X не е во ѕвездата, на пример X е во внатрешноста на $\measuredangle QA_5R$ (цртеж десно). Од конвексноста на P следува дека отсечките XA_4, XA_6, A_4A_6 се во P, па значи $\triangle A_6A_4X \subset P$. Но, тогаш A_5 е внатрешна точка за $\triangle A_6A_4X$, а тоа противречи на условот дека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е впишан во P (A_5 треба да лежи на страна на P).

Понатаму, можеме да сметаме дека во секој од триаголниците A_1A_2M, A_2A_3N, A_3A_4T, A_4A_5Q, A_5A_6R и A_6A_1S е содржи најмногу по едно теме од P. Во спротивно, ако на пример темињата X_1 и X_2 се во $\triangle A_1A_2M$, тогаш X_1 и X_2 може да се заменат со пресечната точка Y на A_1X_1 и A_2X_2 при што новодобиениот многуаголник ќе има поголема плоштина од P (цртеж десно).



Нека X_1 и X_2 се две последователни темиња на P кои се соодветно во триаголниците A_1A_2M и A_2A_3N. Да разгледаме црнтрална симетрија со центар во A_2 и нека таа симетрија ја пресликува X_1 во $X_1^{'}$. Бидејќи сликата на A_1 е N и P е конвексен, следува дека триаголниците $A_2A_3X_2$ и $A_2NX_1^{'}$ немаат заеднички внатрешни точки. Оттука следува дека

$$P_{A_2A_3X_2} + P_{A_2NX_1^{'}} \leq P_{A_2A_3N},$$

па значи

$$P_{A_2A_3X_2} + P_{A_2NX} \leq P_{A_2A_3N} = \frac{1}{6}H.$$

Ако ги повоториме истите размислувања за останатиоте темиња на P добиваме

$$P \le H + 3 \cdot \tfrac{1}{6} H = \tfrac{3}{2} H .$$

Равенство се достигнува само кога

$$P_{A_2 A_3 X_2} + P_{A_2 N X_1'} = P_{A_2 A_3 N} ,$$

а тоа е можно кога во еден од триаголниците $A_1 A_2 M$ и $A_2 A_3 N$ нема теме од P, а кога тоа теме го има истото се совпаѓа со M или N. Според тоа, равенство се достигнува ако и само ако P е еден од триаголниците TRM или SNQ.

4. Докажи дека не постои бикеција $f : \{1, 2, ..., n, ...\} \to \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ таква што

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n) \text{, за секои } m, n \in \mathbb{N} .$$

Решение. Нека претпоставиме дека постои функција $f(x)$ со саканите својства и да ја разгледаме функцијата $g(x) = 3f(x) + 1$. Лесно се проверува дека g е инјекција и $g(mn) = g(m)g(n)$, за секои $m, n \in \mathbb{N}$. Да забележиме дека $g(x)$ не е сурјекција, т.е. за секој $y \in \{0, 1, 2, ...\}$ не постои $x \in \{1, 2, ...\}$ таков што $g(x) = y$. Имено, g го пресликува множеството $\{1, 2, ...\}$ во множеството природни броеви од видот $3n + 1$, каде $n \in \{1, 2, ...\}$.

Освен тоа важи $g(1) = g(1^2) = g^2(1) = 1$, па затоа важи $g(1) = 1$.

Нека p, q и r се природни броеви за кои $g(p) = 4, g(q) = 10$ и $g(r) = 25$. Бидејќи ниту еден од броевите 4, 10 и 25 не може да се запише како производ на два броја од множеството $\{4, 7, 10, ...\}$, заклучуваме дека p, q и r се различни прости броеви. Но,

$$4 \cdot 25 = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(p)g(r) = g^2(q) \quad \Leftrightarrow \quad g(pr) = g(q^2) \quad \Leftrightarrow \quad pr = q^2 ,$$

што не е можно за различни прости броеви.

Конечно, од добиената противречност следува дека не постои функција со саканите својства.