Како решити задатак свођењем на већ решени

***Радојко Дамјановић*, О.Ш. "Трећи крагујевачки батаљон", Крагујевац**

Често је, да бисмо решили неки проблем, потребно да знамо решење неког другог проблема; или можемо да кажемо овако: често се решавање неког проблема своди до неког већ решеног. Следећа два задатка најбоље говоре о томе.

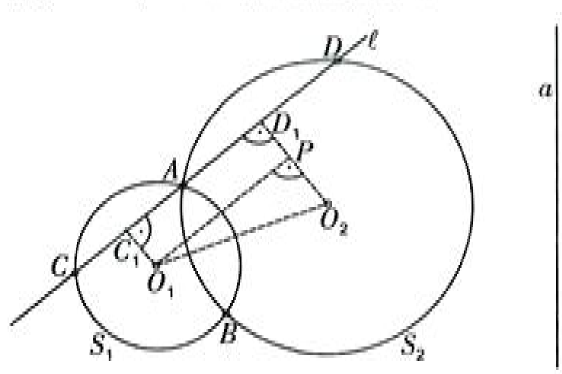
Задаци:

(1) Две дате кружнице S_1 и S_2 се секу у тачкама A и B. Конструисати кроз тачку A праву l, чији је одсечак ограничен кружницама S_1 и S_2 и има дату дужину a.

(2) Конструисати троугао, који је подударан датом троуглу и чије странице садрже три задате тачке.

Решења:

(1) Претпоставимо да је CD тражени одсечак праве ℓ.



Слика 1

Нека су O_1C_1 и O_2D_1 дужи нормалне на праву ℓ, и O_1P нормала на O_2D_1. Тада, пошто су троуглови $\triangle O_1AC$ и $\triangle O_2AD$ једнакокраки (јер је $O_1A = O_1C$ и $O_2A = O_2D$), имамо да је $AC_1 = CC_1$ и $AD_1 = DD_1$. Затим, имамо да је

$$C_1D_1 = AC_1 + AD_1 = \frac{1}{2}(AC + AD) = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a.$$

Даље, како је $\triangle O_1O_2P$ правоугли, при чему је O_1O_2 хипотенуза, а O_1P катета, и како је четвороугао $O_1PD_1C_1$ правоугаоник, имамо да је $O_1P = C_1D_1$, што коначно даје да је $O_1P = \frac{1}{2}a$.

Сада, ако су дате кружнице S_1 и S_2 ($S_1 \cap S_2 = \{A, B\}$) и произвољна дуж a, најпре конструишемо правоугли троугао над хипотенузом O_1O_2 и катетом O_1P дужине $\frac{a}{2}$, а затим праву ℓ која садржи тачку A и паралелна је са O_1P.

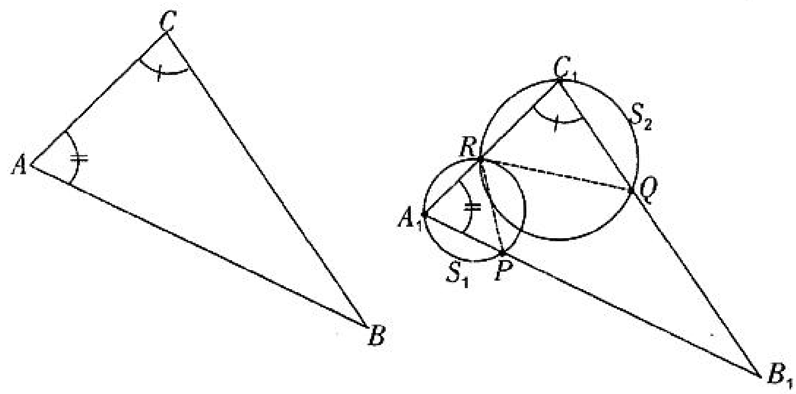
Дискусија. Задатак:

(i) има два решења, ако је $O_1O_2 > \frac{1}{2}a$;

(ii) има тачно једно решење, ако је $O_1O_2 = \frac{1}{2}a$;

(iii) нема решења, ако је $O_1O_2 < \frac{1}{2}a$.

(2) У равни је дат, произвољно, троугао ABC и три тачке P, Q, R (неколинеарне). Потребно је конструисати троугао $A_1B_1C_1$, подударан датом троуглу ABC, тако да три дате тачке припадају његовим страницама A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1, респективно.



Слика 2

Задатак се своди на претходни, на следећи начин. Спојимо тачке P и R и конструишемо кружницу S_1, тако да њен централни угао над тетивом PR буде једнак двоструком углу $\sphericalangle CAB$ (тј. да сви периферијски углови над тетивом PR буду једнаки углу $\sphericalangle CAB$).

Такође, повежимо тачке Q и R и конструишемо кружницу S_2, тако да њен централни угао над тетивом RQ буде једнак двоструком углу $\sphericalangle ACB$ (тј. да сви периферијски углови над тетивом RQ буду једнаки углу $\sphericalangle ACB$).

Није тешко закључити да се кружнице S_1 и S_2 секу у тачки R, па је, као у задатку (1), потребно конструисати дуж која садржи тачку R и ограничена је овим кружницама и чија је дужина једнака страници AC троугла ABC. На овај начин смо конструисали страницу A_1C_1 ($A_1 \in S_1, C_1 \in S_2$) троугла $A_1B_1C_1$. Теме B_1 добијамо у пресеку правих A_1P и C_1Q.

Задатак може имати два, једно или да нема решења у зависности од тога како смо распоредили три задате тачке и како оне испуњавају услове који су дефинисани у задатку (1).

Задатак за самостални рад:

Нека се кружнице S_1 и S_2 са центрима O_1 и O_2 секу у тачкама A и B. Права ℓ кроз тачку A сече кружницу S_1 у тачки M_1 и кружницу S_2 у тачки M_2. Доказати да је $M_1M_2 \leqslant 2 \cdot O_1O_2$. У ком је случају је $M_1M_2 = 2 \cdot O_1O_2$?

(23. Савезном такмичење младих математичара ученика основних школа Југославије, 06. јун 1992. године у Новом Саду.)

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2003/04 година