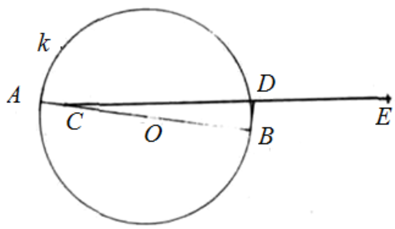
Алија Муминагиќ
Данска

# ЗА РЕКТИФИКАЦИЈАТА НА КРУЖНИЦАТА И КВАДРАТУРАТА НА КРУГОТ

**1.** Да се ректифицира кружница значи само со користење на линијар и шестар да се конструира отсечка чија должина е еднаква на должината на дадената кружница.

Докажано е дека оваа конструкција не е изводлива. Но, најдени се различни можности да се конструира отсечка чија должина е приближно еднаква на должината на дадената кружница. Во продолжение ќе дадеме две такви конструкции.

а) Нека е дадена кружница $k(O,r)$. На дијаметарот $AB$ (цртеж десно) конструираме точка $C$ таква што $AC=\frac{r}{8}$. Во точката $B$ конструираме тангента и на неа определуваме точка $D$ таква што $BD=\frac{r}{4}$, а на правата $CD$ определуваме точка $E$ таква што $DE=\frac{5r}{4}$. Имаме $CE=CD+DE$. Од триаголникот $CBD$ следува




$$CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=\sqrt{(\tfrac{15r}{8})^2+(\tfrac{r}{4})^2}=r\sqrt{\tfrac{225}{64}+\tfrac{1}{16}}\simeq 1{,}8915932438r\,,$$

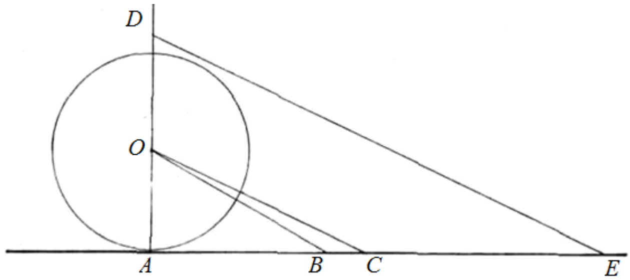
па затоа

$$CE\simeq 1{,}8915932438r+1{,}25r=3{,}1415932438r\,.$$

Бидејќи должината на половината кружница $k$ е $\frac{O}{2}\approx 3{,}141592653589r$ добиваме дека отсечката $CE$ е еднаква приближно на половинаод должинара на кружницата $k$ со апсолутна грешка $0{,}0000005902129r$. Со удвојување на оваа отсечка се добива отсечка која приближно е еднаква на должината на кружницата со апсолутна грешка $0{,}000001180425r$.

б) Нека е дадена кружница $k(O,OA=r)$. Во точката $A$ конструираме тангента на кружницата и на неа определуваме точки $B$ и $C$ такви што $AB=\frac{11}{5}r$ и $BC=\frac{2}{5}r$ ($B$ е меѓу $A$ и $C$). Потоа го продолжуваме радиусот $AO$ и на него наоѓаме точка $D$ таква што $AD=OB$. Низ точката $D$

конструираме права паралелна на правата $OC$, која ја сече тангентата $AB$ во точката $E$. Ќе докажеме дека $OE \approx 2\pi r$.




Од слиноста на триаголниците $ACO$ и $AED$ следува

$$AC : AE = AO : AD, \text{ т.е. } AE = \frac{AC \cdot AD}{AO}.$$

Понатаму, од триаголникот $OAB$ имаме

$$OB = \sqrt{AO^2 + AB^2} = \sqrt{r^2 + (\tfrac{11}{5}r)^2} = r\frac{\sqrt{146}}{5}.$$

Според тоа, $AD = r\frac{\sqrt{146}}{5}$. Затоа,

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AO} = \frac{\frac{13}{5}r \cdot r\frac{\sqrt{146}}{5}}{r} = \frac{13\sqrt{146}}{25}r \approx 6{,}283183906269177r,$$

што значи дека $AE$ ја дава должината на дадената кружница со грешка не поголема од $0{,}00000140091041r$. Според тоа, кога со овој метод би се определувала должината на Екваторот (земајќи дека радиусот на земјината топка е 6366 *km*), ќе се направи грешка помала од $8{,}92\ m$.

**2.** Проблемот на квадратура на кругот е поставен уште во антиката, а значи: со користење само на линијар и шестар да се конструира квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на даден круг.

И за оваа конструкција е докажано дека не е изводлива. Ова всушност произлегува од тоа што ректификацијата на кружницата не е изводлива. Имено, ако е изводлива квадратурата на кругот, тогаш ќе биде изводлива и ректификацијата на кружницата и обратно. Но, постојат повеќе начини приближно да се констуира бараниот квадрат и овде ќе дадеме една таква констркција.

Нека е дадена кружницата $k(O, OA = r)$ и нека во неа е вписан квадрат $ABCD$ (цртеж десно). Конструираме тетива $MN = r$, паралелна на страната $CD$ и нека $G$ е нејзината средина. Ја конструираме симетралата на $CD$ која ја сече кружницата $k$ во точките $E$ и $F$.

Конструираме кружница $k'(M, AB)$ која ја сече симетрлата $EF$ во точката $H$ . Потоа ја конструираме кружницата $k*(H, HM)$ која ја сече симетралата $EF$ во точката $K$ . Ќе докажеме дека $EK$ приближно е еднаква на страната на квадратот чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот круг.

Бидејќи

$$EK = EO + OG + GH - HK, \; EO = r, \; OG = \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

$$GH = \sqrt{(r\sqrt{2})^2 - (\tfrac{r}{2})^2} = \frac{r\sqrt{7}}{2} \text{ и } HK = AB = r\sqrt{2},$$

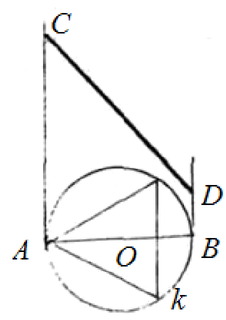
добиваме

$$EK = EO + OG + GH - HK = r + \frac{r\sqrt{3}}{2} + \frac{r\sqrt{7}}{2} - r\sqrt{2} \approx 1,7746874969436r.$$

Од друга страна, бидејќи плоштината на бараниот квадрат мора да биде еднаква на плоштината на дадениот круг, треба да важи $a^2 = r^2\pi$ , односно $a = r\sqrt{\pi} \approx 1,7724538590905r$ . Според тоа, отсечката $EK$ се разликува од страната на бараниот квадрат приближно за $0,0022289060386r$ , што е помалку од $0,23\%$ од $r$ .

Задача

1. Нека е дадена кружница $k(O, OA = r)$ со дијаметар $AB$ и нека во точките $A$ и $B$ во иста насока конструираме две полуправи нормални на $AB$ (цртеж десно). Нека на првата полуправа нанесеме отсечка $AC = 3r$ , а на втората отсечка $BC = \frac{\sqrt{3}}{3}r$ (третина од страната на рамностраниот триаголник вписан во дадената кружница). Докажи дека отсечката $CD$ не се разликува повеќе од $0,0001r$ од полупериметарот на дадената кружница.




Статијата прво е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија