Vojislav Andrić (Valjevo)

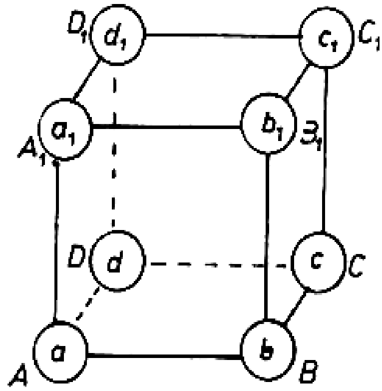
BROJEVI I KOCKA

Ako ste nekada rešavali problem razmeštanja brojeva 1,2,3,4,5, 6,7,8 u vrhove (temena) kocke tako da zbir brojeva na svakoj strani bude isti, onda ste ga, verovatno, brzo rešili, razmatrajući i kombinujući razne mogućnosti razmeštaja.

Oni mladi matematičari koji su problem malo dublje sagledali uočili su da postoje izvesne zakonitosti po kojima se vrši razmeštaj brojeva u temena kocke; da se po istim zakonitostima mogu razmestiti i brojevi nekog drugog (ali ne svakog) osmočlanog skupa brojeva; da postoji više rešenja datog problema, itd.

Cilj ovog teksta je da čitaocima koji ovaj problem nisu rešavali, ili nisu sagledali odgovore na sva ova pitanja, pruži objašnjenje i ukaže na nove puteve i probleme.

1. Posmatrajmo kocku (sl. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ u čija temena su smešteni brojevi $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$. Temena koja pripadaju jednoj ivici kocke (A i B, A i D, B, C, itd.) zvaćemo susednim, a brojeve koji su razmešteni u susedna temena — susednim brojevima. Paralelne ivice koje ne pripadaju istoj strani kocke (AA_1 i CC_1, BB_1 i DD_1, itd.) nazivaćemo naspramnim ivicama, Temena koja pripadaju velikim dijagonalama kocke zvaćemo naspramnim, a brojeve koji su razmešteni u naspramna temena — naspramnim brojevima.



Sl. 1

Teorema 1. Ako je zbir brojeva na svima stranama kocke isti, onda je on jednak poluzbiru svih razmeštenih brojeva.

Dokaz. Svako teme kocke pripada trima stranama kocke, pa zato zbir brojeva sa svih 6 strana kocke, predstavljene na sl. 1, iznosi $3(a+b+c+d+a_1+b_1+c_1+d_1)$. Kako imamo 6 strana, a zbir brojeva na svakoj strani je isti, to taj zbir iznosi

$$S=\frac{a+b+c+d+a_1+b_1+c_1+d_1}{2},$$

tj. jednak je polovini zbira svih brojeva.

Posledica 1. Da bi se celi brojevi a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1 mogli razmestiti u vrhove kocke tako da zbir brojeva na svakoj strani bude isti, potrebno je da zbir svih brojeva bude deljiv sa 2.

Tako, na primer, brojevi 1,2,3,4,5,6,7,8 zadovoljavaju navedeni nužni uslov da mogu biti razmešteni na temenima kocke na pomenuti način, jer je zbir tih brojeva $m=36$ deljiv sa 2; a da bi taj razmeštaj bio izvršen, nužno je da zbir brojeva na svakoj strani bude 18.

2. Ma koje dve susedne strane kocke imaju po jednu zajedničku ivicu. Ova činjenica se može iskoristiti da se pronađu još neke zakonitosti ovog razmeštaja.

Teorema 2. Ako je zbir brojeva na svakoj strani kocke isti, onda su zbirovi brojeva na naspramnim ivicama kocke međusobno jednaki.

Dokaz:

(1) $a+b+c+d=a+b+b_1+a_1$	iz čega sleduje	$c+d=a_1+b_1$	(1′)
(2) $a+b+c+d=c+d+d_1+c_1$	„ „ „	$a+b=c_1+d_1$	(2′)
(3) $a+b+b_1+a_1=b+c+c_1+b_1$	„ „ „	$a+a_1=c+c_1$	(3′)
(4) $a+b+b_1+a_1=a+d+d_1+a_1$	„ „ „	$b+b_1=d+d_1$	(4′)
(5) $a+b+c+d=b+c+c_1+b_1$	„ „ „	$a+d=b_1+c_1$	(5′)
(6) $a+b+c+d=a+d+d_1+a_1$	„ „ „	$b+c=a_1+d_1$	(6′)

Jednakosti iz desnog stupca gornje tabele pokazuju da je dokaz teoreme izveden.

Posledica 2. Da bi se celi i međusobno različiti brojevi $x_1<x_2<$ $<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7<x_8$ mogli razmestiti u vrhove kocke tako da zbir brojeva na svakoj strani kocke bude isti, potrebno je da brojevi x_1 i x_2, x_1 i x_3, x_6 i x_8, x_7 i x_8 budu nesusedni.

Dokaz. Ako bi brojevi x_1 i x_2 (dva najmanja bili) susedni, tj. pripadali jednoj od ivica kocke, onda bi i zbir brojeva na naspramnoj ivici kocke morao biti isto toliki, što je nemoguće, jer je zbir ma koja dva od preostalih brojeva veći od x_1+x_2. Na sličan način se izvodi dokaz i za ostale navedene parove brojeva.

Iz tog razloga, na primer, da bi se brojevi 1,2,3,4,5,6,7,8 mogli razmestiti u vrhove kocke tako da zbirovi na svakoj strani kocke budu međusobno jednaki, potrebno je da brojevi 1 i 2, 1 i 3, 6 i 8, 7 i 8 budu nesusedni.

3. Iako smo neke zakonistosti razmeštaja i u konkretnom i optem slučaju već uočili, one nisu dovoljne za rešavanje našeg i opštijih problema. Zato nastavljamo istraživanje.

Teorema 3. Ako su zbirovi brojeva sa svake strane kocke međusobno jednaki, onda je razlika naspramnih brojeva konstantna.

Dokaz. Koristeći se jednakostima (1')—(3') dobijamo:

$$c-a_1=b_1-d, \quad a-c_1=d_1-b, \quad a-c_1=c-a_1,$$

odakle zaključujemo da je

$$a-c_1=b_1-d=c-a_1=d_1-b \quad \text{odnosno} \quad c_1-a=d-b_1=a_1-c=b-d_1.$$

Kako su parovi a i c_1, b i d_1, c i a_1, d i b_1 zaista naspramni brojevi, to je dokazivanje teoreme završeno.

Posledica 3. Ako je od 8 datih brojeva moguće obrazovati 4 uređena para brojeva, takvih da su razlike između prvog i drugog od svaka dva broja koja čine isti par međusobno jednake, ti brojevi se mogu razmestiti po temenima kocke tako da zbirovi brojeva sa svake strane kocke budu isti.

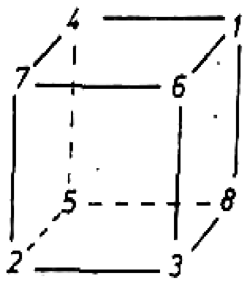
Dokaz. Ako su zadovoljeni uslovi $a-c_1=b_1-d=c-a_1=d_1-b=k$, tako da je $a=c_1+k$, $b=d_1-k$, $c=a_1+k$, $d=b_1-k$, onda se putem neposrednog proveravanja može utvrditi da će biti zadovoljene i jednakosti 1 — 6, što znači da će zbirovi brojeva na svima stranicama kocke biti isti.

Kako se pak svaki od 4 uređena para brojeva, koji imaju svojstvo da su razlike između prvog i drugog člana svakog od njih međusobno jednake, može smatrati za po jedan od parova (a, c_1), (b_1, d) (c, a_1) i (d_1, b), odnosno za parove (c_1, a), (d, b_1), (a_1, c) i (d_1, b), to se oni mogu razmestiti po temenima kocke tako da zbir brojeva na svakoj strani kocke bude isti.

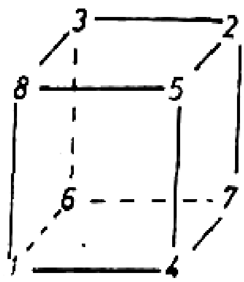
Prema tome, potreban i dovoljan uslov da bi se 8 brojeva mogla razmestiti po temenima kocke tako da zbir brojeva na svakoj strani bude isti jeste to da se od njih mogu obrazovati 4 uređena para, takva da su razlike između prvog i drugog od brojeva koji čine isti par međusobno jednake.

Napomena. Kako se 4 para brojeva mogu poređati naspram parova (a,c_1), (b_1,d), (c, a_1) i (d_1, b), odnosno naspram parova (c_1, a), (d_1, b) (a_1, c) i (b, d_1) na po 4.3.2.1=24 načina, to je razmeštaj parova koji zadovoljavaju navedeni uslov moguće izvršiti na 24.2=48 načina.

Tako, na primer, ako su u pitanju brojevi 1,2,3,4,5,6,7,8 ,pa se od njih formiraju parovi (2,1), (4,3), (6,5) i (8,7), onda se može uzeti da je $a=2$, $c_1=1$; $b_1=6$, $d=5$; $c=8$, $a_1=7$, $d_1=4$, $b=3$, ali se može uzeti i da je $a=1$, $c_1=2$; $b_1=5$, $d=6$; $c=7$, $a_1=8$, $d_1=3$, $b=4$. U ova dva slučaja brojevi će se pojaviti na kocki onako kao što je predstavljeno na sl. 2, odnosno na sl. 3, i u oba slučaja će zbirovi brojeva na svakoj strani kocke biti međusobno jednaki.



Sl. 2



Sl. 3

No, raspoređivanje ovih brojeva moguće je izvršiti, kao što smo videli, prema postavljenom zahtevu još na 22 načina.

Zadaci

1. Pokažite da se od brojeva 1,2,3,4,5,6,7 i 8 mogu formirati na 3 načina po 4 uređena para koji imaju svojstvo da su razlike između prvog i drugog broja svakog para međusobno jednake.

2. Dokažite da se ma kojih 8 uzastopnih celih brojeva mogu razmestiti u temena kocke tako da je zbir brojeva na svakoj strani kocke isti.

3. Utvrdite zakonitost razmeštaja 8 brojeva u temena kocke tako da proizvodi brojeva sa svake strane kocke budu međusobno jednaki.

4. Pokušajte da formulišete probleme razmeštaja brojeva u temena tetraedra i oktaedra i da za takve probleme pronađete odgovarajuće zakonitosti razmeštaja.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија